EDMOND RAMIS

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

3

TOPOLOGIE

ET

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

COURS DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

par

E. Ramis
Inspecteur général de l'Instruction Publique

C. Deschamps
Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Louis-le-Grand

J. Odoux
Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Champollion, à Grenoble

3

TOPOLOGIE ET ÉLÉMENTS D'ANALYSE

Classes Préparatoires et Enseignement Supérieur (1er cycle)

3e édition
revue et augmentée

MASSON
Paris Milan Barcelone Bonn
1991

AVERTISSEMENT

Le présent ouvrage est le troisième des cinq tomes d'un Cours de Mathématiques *écrit à l'intention des élèves* des classes de Mathématiques Supérieures et de Mathématiques Spéciales *(types M et M', P et P', et TA). Il était à l'origine conforme aux programmes du 4 février 1972, et, dans son état actuel, il répond largement aux exigences des programmes du 16 septembre 1988.*

Au prix de quelques compléments nous avons fait en sorte que l'ouvrage soit utilisable par les étudiants des Universités.

Conscients du fait qu'un cours de mathématiques peut s'organiser de bien des façons, et désireux de respecter le choix des professeurs — auxquels nous n'avons, naturellement, pas l'intention de nous substituer — nous avons groupé dans chacun des cinq tomes un ensemble cohérent auquel le lecteur pourra se reporter sans hésitation.

*Les deux premiers tomes sont consacrés à l'*Algèbre et à ses applications à la Géométrie. L'Analyse *fait l'objet des Tomes 3 et 4. Tome 3 :* Topologie et éléments d'analyse ; *Tome 4 :* Séries et équations différentielles. *Le dernier tome traite des* Applications de l'Analyse à la Géométrie.

• *Nous nous sommes efforcés de respecter au maximum l'esprit des programmes ; il nous est toutefois arrivé de traiter certaines questions sous un angle plus général que celui qui y figure explicitement. Nous l'avons fait avec modération.*

• *Nous avons apporté le plus grand soin au choix des notations. La terminologie utilisée est en général celle des programmes et de leurs commentaires. Précisons que :*

— pour nous, tout anneau possède un élément-unité, ce qui dispense de parler d'anneau unitaire (ou unifère),

— nous imposons à tout morphisme d'anneaux de transformer l'élément-unité de l'objet en celui de l'image, ce qui évite l'introduction de la notion de représentation,

— nous imposons à tout anneau intègre d'être commutatif,

— nous convenons que les formes sesquilinéaires sont semi-linéaires à gauche,

— en ce qui concerne le logarithme népérien, nous nous sommes efforcés de tenir compte de ce que la notation ln *a pris le pas sur la notation* Log.

• *Afin de nous adapter aux exigences des divers utilisateurs de notre ouvrage, nous avons utilisé deux corps de caractères, les plus petits étant consacrés*

— *d'une part à des remarques, exemples et contre-exemples qui doivent être considérés comme formant un tout avec le texte imprimé en caractères normaux,*

— *d'autre part à des compléments réservés à une « seconde lecture » et qui, en fait, s'adressent exclusivement aux élèves des classes M'.*

• *Nous avons utilisé le signe □, qui peut se lire : « la proposition en résulte », pour matérialiser la fin d'une démonstration et annoncer l'introduction d'une idée nouvelle.*

• *Le double astérisque, *...*, permet d'isoler un résultat faisant intervenir des notions qui n'ont pas encore été étudiées dans le Cours, mais qui sont connues du lecteur (à charge pour celui-ci de s'assurer qu'il n'y a pas de cercle vicieux).*

• *Le système de repérage est simple : le numéro du tome est indiqué en chiffres romains, ceux du chapitre, du sous-chapitre et du paragraphe en chiffres arabes. C'est ainsi que I.5.6.2 renvoie au second paragraphe du sixième sous-chapitre du cinquième chapitre du tome I, (le numéro de tome n'étant pas spécifié lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté).*

Des exercices sont adjoints à chaque chapitre. Bien qu'ils soient de difficulté inégale, nous n'avons pas jugé bon de les repérer par des lettres avertissant le lecteur de leur difficulté croissante. En principe, les plus faciles sont en tête de chaque série.

LES AUTEURS

TABLE DES MATIÈRES

1
LE CORPS DES RÉELS

> *L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs a été défini en Algèbre* (**1**.6.*5 et* **3**.1.*1*, 2°). *Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$* (*Algèbre* **3**.*4*.*2*).

1.1. UNE CONSTRUCTION DE $\mathbb{R}$

1.1.*1*. Suites dans un corps commutatif totalement ordonné

Dans le présent n° **1**.1.*1*, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif totalement ordonné, c'est-à-dire un corps commutatif muni d'une relation d'ordre total ($\leqslant$) telle que les inégalités $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$ entraînent les inégalités $0 \leqslant x+y$ et $0 \leqslant xy$.

Nous savons qu'un tel corps est de caractéristique nulle.

Nous désignons par $\mathbb{K}_+$ (resp. $\mathbb{K}_+^*$) l'ensemble des éléments positifs (resp. strictement positifs) de $\mathbb{K}$.

Rappelons que nous disposons de la *valeur absolue*, qui est l'application $x \longmapsto |x| = \text{Max}\,(x, -x)$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}_+$ (cf. I.3.5.*1*, 4°).

1° ***Suites dans*** $\mathbb{K}$. — Les suites dans $\mathbb{K}$ (ou suites d'éléments de $\mathbb{K}$) sont, par définition, les applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans $\mathbb{K}$. Soit $\boldsymbol{x}$ l'une d'elles; elle est déterminée quand on connaît l'image x_n par $\boldsymbol{x}$ de tout élément $n \in \mathbb{N}$; on pourra désigner la suite par $(x_n)_{n\in N}$ et, abréviativement, par (x_n).

Nous avons montré (I.4.4, *1*° Exemple *b*)) que l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites sur le corps commutatif $\mathbb{K}$, muni des lois :

$$(x_n)+(y_n) = (x_n+y_n)\,; \quad (x_n)\cdot(y_n) = (x_ny_n)\,; \quad \alpha\cdot(x_n) = (\alpha x_n)$$

est une K-algèbre commutative qui admet pour élément unité la suite constante $n \longmapsto 1$ (1 : élément unité de $\mathbb{K}$).

2° ***Suites bornées.*** — Conformément aux définitions données dans le cours d'Algèbre, une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite *majorée* (resp. *minorée*) si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ x_n \leqslant M$ (resp. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ M \leqslant x_n$). Une suite à la fois majorée et minorée est dite *bornée*. On vérifie

aisément que la suite (x_n) est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{K}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leqslant M$ (autrement dit $(|x_n|)_{n\in N}$ est majorée).

THÉORÈME. — **L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{K})$ des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.**

Vérification immédiate.

3° ***Suites convergentes.*** — DÉFINITION. — **On dit que la suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente si et seulement s'il existe un élément $a \in \mathbb{K}$ vérifiant la condition**[1] **:**

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Notons qu'il ne peut exister deux éléments distincts, a et a', de $\mathbb{K}$ vérifiant (1). En effet, dans le cas contraire, on pourrait considérer l'élément :

$$\varepsilon = |a' - a|/2$$

de $\mathbb{K}_+^*$, lui associer deux naturels N_1 et N_2 tels que :

$$\forall n \geqslant N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon; \qquad \forall n \geqslant N_2 \quad |x_n - a'| < \varepsilon$$

En posant $N = \max(N_1, N_2)$ on aurait, en particulier :

$$|x_N - a| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |x_N - a'| < \varepsilon.$$

Compte tenu de : $\qquad |a' - a| \leqslant |a' - x_N| + |x_N - a|,$

cela conduirait à : $\qquad |a' - a| < 2\varepsilon, \qquad$ avec $\qquad 2\varepsilon = |a' - a|,$

ce qui constituerait une contradiction.

Ainsi, si une suite (x_n) est convergente, il existe un et un seul $a \in \mathbb{K}$ vérifiant (1); on est en droit de dire que a est *la limite* de la suite (x_n), et d'écrire $a = \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)$, ou abréviativement $a = \lim x_n$;

On dit aussi que *la suite converge* vers a.

On appelle *suite divergente* toute suite qui n'est pas convergente.

REMARQUE IMPORTANTE. — On obtient une définition équivalente de la limite en remplaçant la condition (1) par :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad |x_n - a| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit de remarquer que, pour tous $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$ est une conséquence de $|x_n - a| < \varepsilon$ et que $|x_n - a| < \varepsilon$ est une conséquence de $|x_n - a| \leqslant \varepsilon/2$.

EXEMPLE. — Une suite (x_n) est dite *stationnaire* si et seulement s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = x_{n_0}$ dès que $n \geqslant n_0$; une telle suite converge vers x_{n_0}. Notons qu'une suite constante est stationnaire.

---

[1] La notation $\forall n \geqslant N$ est mise pour : $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1, \ldots, N-1\}$; cette remarque est valable pour toute la suite de ce cours.

THÉORÈME I. — **Si la suite (x_n) converge vers a, alors la suite $(|x_n|)$ converge vers $|a|$.**

Cela résulte de la définition, compte tenu de l'inégalité :

$$||x_n|-|a|| \leqslant |x_n-a|$$ □

THÉORÈME II. — **Si la suite (x_n) converge vers a, et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant b$, alors $a \geqslant b$.**

Par l'absurde, supposons $a < b$; à l'élément $\varepsilon = b-a$ de $\mathbb{K}_+^*$ on peut associer le naturel N tel que : $\forall\, n \geqslant N \quad |x_n-a| < \varepsilon$; il en résulte $x_N-a < b-a$, et donc $x_N < b$, ce qui constitue une contradiction. □

4° *Suites de Cauchy.* — DÉFINITION. — **On dit que la suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est une suite de Cauchy si et seulement si :**

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{K}_+^* \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad \forall\, p \geqslant N \qquad |x_n-x_p| < \varepsilon. \tag{2}$$

THÉORÈME I. — **Toute suite convergente est une suite de Cauchy.**

Soit (x_n) une suite qui converge vers a. A tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$ on peut associer $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n-a| < \varepsilon/2$ dès que $n \geqslant N$.

En utilisant : $|x_n-x_p| \leqslant |x_n-a|+|a-x_p|$

on en déduit que, pour $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$, on a : $|x_n-x_p| < \varepsilon$. □

THÉORÈME II. — **Toute suite de Cauchy est bornée.**

Soit (x_n) une suite de Cauchy. A l'élément $\varepsilon = 1$ de $\mathbb{K}_+^*$ on peut associer $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n-x_N| < 1$ dès que $n \geqslant N$. D'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |x_n| \leqslant \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, 1+|x_N|\}$$

THÉORÈME III. — **L'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ des suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (ou de $\mathcal{B}(\mathbb{K})$).**

La suite-unité étant une suite de Cauchy, il suffit de vérifier que la partie $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est stable pour les trois lois de structure d'algèbre.

Soient (x_n) et (y_n) deux suites de Cauchy, α un élément de $\mathbb{K}$.

— Ecrivons : $|(x_n+y_n)-(x_p+y_p)| \leqslant |x_n-x_p|+|y_n-y_p|$

A tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$ on sait associer $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall\, n \geqslant N_1 \qquad \forall\, p \geqslant N_1 \qquad |x_n-x_p| < \varepsilon/2,$$

et : $$\forall\, n \geqslant N_2 \qquad \forall\, p \geqslant N_2 \qquad |y_n-y_p| < \varepsilon/2.$$

En posant $N = \max(N_1, N_2)$, on constate :

$$\forall\, n \geqslant N \qquad \forall\, p \geqslant N \qquad |(x_n+y_n)-(x_p+y_p)| < \varepsilon$$

ce qui montre que (x_n+y_n) est une suite de Cauchy. □

— Ecrivons : $|x_n y_n - x_p y_p| \leqslant |x_n - x_p|\ |y_n| + |x_p|\ |y_n - y_p|$

Les suites de Cauchy (x_n) et (y_n) étant bornées, il existe $M \in \mathbb{K}_+^*$ tel que $|x_n| \leqslant M$ et $|y_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$:

$$|x_n y_n - x_p y_p| \leqslant (|x_n - x_p| + |y_n - y_p|) M$$

En raisonnant comme ci-dessus, on constate qu'à tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$ on sait associer $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \forall p \geqslant N \quad (|x_n - x_p| < \varepsilon/2M \text{ et } |y_n - y_p| < \varepsilon/2M)$$

On en déduit :

$$\forall n \geqslant N \quad \forall p \geqslant N \quad |x_n y_n - x_p y_p| < \varepsilon$$

ce qui montre que $(x_n y_n)$ est une suite de Cauchy. □

— Le lecteur pourra vérifier directement que (αx_n) est une suite de Cauchy, ou considérer qu'il s'agit d'un cas particulier de ce qui précède, en prenant pour (y_n) une suite constante.

LEMME. — **Soient (x_n) une suite convergeant vers 0 et (y_n) une suite bornée. Alors la suite $(x_n y_n)$ converge vers 0.**

Il existe $M \in \mathbb{K}_+^*$ tel que $|y_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$ on peut associer $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| < \varepsilon/M$, et par suite $|x_n y_n| < \varepsilon$, dès que $n \geqslant N$. □

THÉORÈME IV. — **L'ensemble $C(\mathbb{K})$ des suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ des suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$, et l'application $(x_n) \longmapsto \lim x_n$, de $C(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.**

La suite unité étant une suite convergente, il suffit de vérifier que la partie $C(\mathbb{K})$ de $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est stable pour les trois lois de structure d'algèbre.

Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergeant respectivement vers a et b, et α un élément de $\mathbb{K}$.

— Ecrivons : $|(x_n + y_n) - (a+b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|$. A tout $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$, on peut associer $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| < \varepsilon/2$ et $|y_n - b| < \varepsilon/2$ dès que $n \geqslant N$. On a donc $|(x_n + y_n) - (a+b)| < \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$. La suite $(x_n + y_n)$ converge vers $a + b$. □

— La suite $(x_n y_n - ab)$ est la somme des suites $[(x_n - a) y_n]$ et $[(y_n - b) a]$. Chacune de ces dernières converge vers 0 d'après le lemme. On en déduit que $(x_n y_n - ab)$ converge vers 0, et donc que $(x_n y_n)$ converge vers ab.

— Le fait que la suite (αx_n) converge vers αa peut être établi directement ou considéré comme cas particulier du précédent. □

REMARQUE. — Nous avons ainsi montré les formules (lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées) :

$\lim (x_n + y_n) = \lim (x_n) + \lim (y_n)$; $\quad \lim (x_n y_n) = \lim (x_n) \lim (y_n)$;

$\lim (\alpha x_n) = \alpha \lim (x_n)$.

PROPOSITION. — **Soit (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$, qui ne converge pas vers 0[1]. Alors il existe un élément a de $\mathbb{K}_+^*$ et un entier $N \in \mathbb{N}$, tels que l'une des deux assertions suivantes soit vraie :**

$$(1) \qquad \forall n \geqslant N \quad x_n \geqslant a; \qquad\qquad \forall n \geqslant N \quad x_n \leqslant -a \qquad (2)$$

Raisonnons par l'absurde. On suppose :

$$\forall a \in \mathbb{K}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad [(\exists\, n \geqslant N \ x_n < a) \wedge (\exists\, p \geqslant N \ x_p > -a)]. \qquad (3)$$

Soit ε un élément de $\mathbb{K}_+^*$. (x_n) étant une suite de Cauchy, on peut trouver $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_p| < \varepsilon/3$ dès que $n \geqslant N_0$ et $p \geqslant N_0$.

En prenant $a = \varepsilon/3$ et $N = N_0$ dans (3), on trouve des entiers $n_0 \geqslant N_0$ et $p_0 \geqslant N_0$ tels que $x_{n_0} < \varepsilon/3$ et $x_{p_0} > -\varepsilon/3$.

De $-\varepsilon/3 < x_{n_0} - x_{p_0}$ et $-\varepsilon/3 < x_{p_0}$, on déduit $-2\varepsilon/3 < x_{n_0} < \varepsilon/3$, et *a fortiori* $|x_{n_0}| < 2\varepsilon/3$. Enfin, pour tout $n \geqslant N_0$, $|x_n - x_{n_0}| < \varepsilon/3$, et donc $|x_n| < |x_{n_0}| + \varepsilon/3 < \varepsilon$. Il en résulte $\lim x_n = 0$, ce qui constitue une contradiction. □

1.1.*2*. Le corps des nombres réels

1° Toute suite convergente d'éléments d'un corps commutatif totalement ordonné est une suite de Cauchy, mais la réciproque est fausse. Cela justifie :

DÉFINITION. — **Le corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{K}$ est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.**

THÉORÈME. — **Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels (I. 3.5.*2*., 5°) n'est pas complet.**

Considérons les deux suites d'éléments de $\mathbb{Q}$ définies par :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}; \qquad y_n = x_n + \frac{1}{n \cdot n!} \quad \text{si} \quad n \geqslant 1 \ \text{et} \ y_0 = y_1 .$$

De $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ et $y_n - y_{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!}$ si $n \geqslant 1$ on déduit :

Pour tout entier $n \geqslant 1$: $x_n < x_{n+1}$ et $y_{n+1} < y_n$.

D'autre part, pour $n \geqslant 1$: $0 \leqslant y_n - x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. On peut donc associer à tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ un naturel N tel que $|y_n - x_n| < \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$ (il suffit de prendre $N \geqslant 1/\varepsilon$, ce qui est possible puisque $\mathbb{Q}$ est archimédien).

---

[1] Cela ne signifie pas que la suite considérée converge vers un élément non nul de $\mathbb{K}$.

Ainsi, si $n \geqslant p \geqslant N$, alors $x_p \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_p$, et donc

$$|x_n - x_p| \leqslant |x_p - y_p| < \varepsilon$$

ce qui montre que (x_n) est une suite de Cauchy.

— Faisons l'hypothèse (H) : (x_n) converge vers $a \in \mathbb{Q}$. Il en résulte que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $x_n < a < y_n$; en effet l'existence de $m \geqslant 1$ tel que $x_m \geqslant a$, impliquerait :

$\forall n > m \quad x_n - a \geqslant x_{m+1} - a > 0$, en contradiction avec (H).

L'inégalité $a < y_n$ se prouve de la même façon.

Comme $a \in \mathbb{Q}$, on peut écrire $a = p/q$, avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On a : $x_q < a < y_q$ et donc :

$$q\,!x_q < q\,!a < q\,!y_q$$

On constate que $q\,!x_q$ est un naturel N et que $q\,!y_q$ est $N + 1/q$. D'où $N < q\,!a < N+1$, ce qui est incompatible avec $q\,!a \in \mathbb{N}$. Il en résulte que l'hypothèse (H) est absurde. □

2° Les notations sont celles du **1.1.*1***. Nous prenons comme corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. L'algèbre $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ des suites de Cauchy de rationnels est ici munie de sa structure sous-jacente d'anneau.

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **L'ensemble $\mathcal{I}$ des suites de rationnels qui convergent vers 0 est un idéal de l'anneau $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. L'anneau-quotient $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\mathcal{I}$ est un corps commutatif, noté $\mathbb{R}$, et appelé corps des nombres réels, ou droite numérique.**

Par un abus de notation classique, $\mathbb{R}$ désigne aussi l'ensemble sous-jacent du corps des nombres réels. Abréviativement, on dit *réel* pour *nombre réel*.

— $\mathcal{I}$ est le noyau du morphisme d'algèbres $(x_n) \longmapsto \lim x_n$ de $C(\mathbb{Q})$ dans $\mathbb{Q}$. C'est donc un sous-groupe additif de $C(\mathbb{Q})$, et donc de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Soient $(x_n) \in \mathcal{I}$ et $(y_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$. La suite (y_n) est bornée (**1.1.*1***., 4°, théorème II), et (x_n) converge vers 0. On en déduit (lemme du **1.1.*1***, 4°) : $(x_n y_n) \in \mathcal{I}$. La première partie du théorème est ainsi démontrée.

— Soient X un élément non nul de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\mathcal{I}$, et (x_n) un élément de la classe d'équivalence X; (x_n) est une suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0 ; d'après la proposition de **1.1.*1***, 4°, il existe $(a, N) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \geqslant a$ pour tout $n \geqslant N$.

Considérons la suite (x'_n) de rationnels déterminée par :

$$x'_n = a \text{ pour } n < N\,;\; x'_n = x_n \text{ pour } n \geqslant N.$$

On vérifie : $(x'_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ et $(x_n) - (x'_n) \in \mathcal{I}$. D'où $(x'_n) \in X$.

En remarquant qu'aucun des rationnels x'_n n'est nul, on dispose de la suite (y_n) déterminée par $y_n = 1/x'_n$. On a :

$$y_n - y_p = \frac{x'_p - x'_n}{x'_n x'_p}, \quad \text{et donc} \quad |y_n - y_p| \leqslant \frac{|x'_n - x'_p|}{a^2}$$

ce qui montre que (y_n) est une suite de Cauchy. Soit Y la classe de (y_n) dans $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\mathfrak{I}$; XY, qui est la classe de la suite constante $n \longmapsto 1_{\mathbb{Q}}$, est l'élément unité de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\mathfrak{I}$. □

1.1.3. Structure de corps totalement ordonné de $\mathbb{R}$

Nous désignons par φ la surjection canonique de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ sur $\mathbb{R} = \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\mathfrak{I}$.

1° *Les réels positifs.* — Définition. — **On appelle réels positifs les éléments de l'ensemble $\mathbb{R}_+ = \varphi(\mathcal{C}_+)$, où $\mathcal{C}_+$ est l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ vérifiant la condition :**

$$((x_n) \in \mathfrak{I}) \vee (\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad x_n > 0).$$

En d'autres termes $\mathbb{R}_+$ est constitué par l'élément nul de $\mathbb{R}$ (noté 0), et par les classes des suites de Cauchy « strictement positives à partir d'un certain rang ». Précisons cette définition :

Lemme. — $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \qquad (\varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+) \Longleftrightarrow (\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_+)$

— Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_+$, alors $\varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+$ par définition.

— Soit $\boldsymbol{x} = (x_n)$ une suite de Cauchy vérifiant : $\varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+$ et $\boldsymbol{x} \notin \mathcal{C}_+$. On a $\boldsymbol{x} \notin \mathfrak{I}$; d'après **1.1.1.**, 4°, il existe $(a, N) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant N \qquad x_n \leqslant -a$$

(l'assertion $(\forall\, n \geqslant N \quad x_n \geqslant a)$ impliquerait en effet $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_+$).

L'élément $\varphi(\boldsymbol{x})$ de $\mathbb{R}_+$ admet un représentant $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}_+$; de $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{y})$, on déduit $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in \mathfrak{I}$. On a $\boldsymbol{y} \notin \mathfrak{I}$ (sans quoi on aurait $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{I}$); il existe donc $(a', N') \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N' \qquad y_n \geqslant a'.$$

D'où : $$\forall\, n \geqslant \max(N, N') \qquad y_n - x_n \geqslant a' + a > 0$$

en contradiction avec $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in \mathfrak{I}$. L'hypothèse est donc absurde. □

2° Théorème. — **Muni de la relation $\leqslant$ définie par :**

$$\forall\, (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (X \leqslant Y) \Longleftrightarrow (Y - X \in \mathbb{R}_+)$$

$\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné.

— D'après le **I.3.5**, il suffit de vérifier :

$\mathbb{R}_+ + \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+$; $\quad \mathbb{R}_+ \cdot \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+$;

$\mathbb{R}_+ \cap (-\mathbb{R}_+) = \{0\}$; $\quad \mathbb{R}_+ \cup (-\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$

Comme φ est un morphisme d'anneaux, il suffit, compte tenu du lemme du 1°, de vérifier :

i) $\mathcal{C}_+ + \mathcal{C}_+ \subset \mathcal{C}_+$ *ii)* $\mathcal{C}_+ \cdot \mathcal{C}_+ \subset \mathcal{C}_+$

iii) $\mathcal{C}_+ \cap (-\mathcal{C}_+) = \mathfrak{I}$ *iv)* $\mathcal{C}_+ \cup (-\mathcal{C}_+) = \mathcal{C}(\mathbb{Q})$

Vérification de i). — Soient (x_n) et (y_n) des éléments de $\mathcal{C}_+$.

— Si ce sont des éléments de $\mathfrak{I}$, alors $(x_n+y_n) \in \mathfrak{I}$ et donc $(x_n+y_n) \in \mathcal{C}_+$.

— Si aucun d'eux n'est élément de $\mathfrak{I}$, alors $x_n+y_n > 0$ à partir d'un certain rang, et donc $(x_n+y_n) \in \mathcal{C}_+$.

— Si $(x_n) \in \mathfrak{I}$ et $(y_n) \notin \mathfrak{I}$, il existe $(a, N) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}$ tel que $y_n \geqslant a$ dès que $n \geqslant N$; il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $x_n > -a$ dès que $n \geqslant N'$. On a $x_n+y_n > 0$ dès que $n \geqslant \max(N, N')$. D'où $(x_n+y_n) \in \mathcal{C}_+$.

Vérification de ii) et iii). — Aisée.

Vérification de iv). — Soit $(x_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Si $(x_n) \notin \mathcal{C}_+$, alors (cf. démonstration du lemme du 1°) il existe $(a, N) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{N}$ tel que $x_n < -a$ dès que $n \geqslant N$. On en déduit $-(x_n) \in \mathcal{C}_+$. □

REMARQUES. — *a)* Si le réel X est strictement positif, et si (x_n) est un représentant de X, alors x_n est strictement positif à partir d'un certain rang. Mais la réciproque est fausse : la suite $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ représente le réel nul.

b) Soit $(x_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Si x_n est positif à partir d'un certain rang, alors $\varphi((x_n)) \in \mathbb{R}_+$. Mais la réciproque est fausse. Ainsi l'élément 0 de $\mathbb{R}_+$ est la classe de la suite $n \longmapsto (-1)^n/(n+1)$.

3° ***Valeur absolue.*** — On rappelle que, pour $X \in \mathbb{R}$, $|X|$ désigne $\max(X, -X)$.

PROPOSITION. — **Soient $x \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ et $X = \varphi(x)$; on désigne par $|x|$ la suite $(|x_n|)_{n\in N}$. Alors $|X| = \varphi(|x|)$.**

De $||x_n|-|x_p|| \leqslant |x_n-x_p|$, on déduit : $|x| \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$.

— Si $X = 0$, alors $x \in \mathfrak{I}$, et donc $|x| \in \mathfrak{I}$ (d'après **1.1.***1*., 3°). Il en résulte $\varphi(|x|) = 0$. Or $|X| = 0$.

— Si $X > 0$, les x_n sont positifs à partir d'un certain rang, et $x_n - |x_n|$ est nul à partir d'un certain rang. D'où $x - |x| \in \mathfrak{I}$, et $\varphi(|x|) = \varphi(x)$. Or $|X| = X$.

— Si $X < 0$, on a $x + |x| \in \mathfrak{I}$ et $\varphi(|x|) = -\varphi(x)$. Or $|X| = -X$. □

1.1.*4*. Plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

1° Considérons l'application $\psi : \mathbb{Q} \to \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ qui à tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$ associe la suite constante $n \longmapsto r$. C'est manifestement un morphisme d'anneaux[1] ; $\theta = \varphi \circ \psi$ est donc un morphisme de corps de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathbb{Q}$ *est isomorphe au sous-corps* θ ($\mathbb{Q}$) *de* $\mathbb{R}$ (I 3.4.*4*, 3°), et que $\theta(\mathbb{Q})$ est le sous-corps premier de $\mathbb{R}$.

[1] Rappelons que, pour nous, un morphisme d'anneaux non nuls transforme l'unité de l'anneau de départ en l'unité de l'anneau d'arrivée.

2° Montrons que θ est *un morphisme de corps ordonnés*, ce qui signifie que l'application θ est croissante. Il nous suffit de vérifier que $\theta(\mathbb{Q}_+) \subset \mathbb{R}_+$. Or :

$$\psi(\mathbb{Q}_+) \subset \mathcal{C}_+ ; \quad \text{d'où} \quad \varphi \circ \psi(\mathbb{Q}_+) \subset \varphi(\mathcal{C}_+) = \mathbb{R}_+.$$

En particulier, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $|\theta(r)| = \theta(|r|)$.

Cet isomorphisme θ du corps ordonné $\mathbb{Q}$ sur le sous-corps $\theta(\mathbb{Q})$ de $\mathbb{R}$ nous permettra ultérieurement d'identifier $\mathbb{Q}$ au sous-corps $\theta(\mathbb{Q})$ de $\mathbb{R}$.

1.2. COMPLÉTUDE DE ℝ ET CONSÉQUENCES

1.2.*1*. Le corps ℝ est complet

$\mathbb{R}$ étant un corps commutatif et totalement ordonné, l'étude générale de **1**.1.*1*. s'applique.

1° Proposition. — **Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de réels ; $(X_n)_{n\in N}$ converge vers $A \in \mathbb{R}$ si et seulement si :**

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \qquad |X_n - A| < \theta(\varepsilon). \tag{1}$$

La convergence de (X_n) vers A se traduit par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}_+^* \qquad \exists M_\omega \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant M_\omega \qquad |X_n - A| < \omega \tag{2}$$

— On suppose que (2) est vrai. Il suffit d'adopter $N_\varepsilon = M_{\theta(\varepsilon)}$ pour constater que (1) est vrai.

— On suppose que (1) est vrai. A tout $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer un représentant $(x_n) \in \mathcal{C}_+(\mathbb{Q})$ de ω et affirmer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $x_n \geqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang, ce qui implique $\omega \geqslant \theta(\varepsilon)$. Il suffit d'adopter $M_\omega = N_\varepsilon$ pour constater que (2) est vrai. □

Remarque. — L'application θ étant strictement croissante, on montre comme au **1**.1.*1*., 3° que l'on peut remplacer dans (1) l'inégalité stricte $|X_n - A| < \theta(\varepsilon)$ par une inégalité large.

2° Théorème. — **Soit $x = (x_n)_{n\in N}$ un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$; on pose $X = \varphi(x)$. Alors la suite $(\theta(x_n))_{n\in N}$ converge vers X dans $\mathbb{R}$.**

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \qquad \forall p \geqslant N \qquad |x_n - x_p| < \varepsilon$$

Considérons un naturel m tel que $m \geqslant N$. Le réel $X - \theta(x_m)$, qui s'écrit $\varphi[x - \psi(x_m)]$, admet pour représentant la suite $n \longmapsto x_n - x_m$. Pour tout $n \geqslant N$, on a $|x_n - x_m| < \varepsilon$. D'où $|X - \theta(x_m)| \leqslant \theta(\varepsilon)$.

Compte tenu du 1°, le théorème en résulte. □

Remarque. — Nous n'avons que l'inégalité large $|X - \theta(x_m)| \leqslant \theta(\varepsilon)$.

Convention. — Désormais, nous identifierons $\mathbb{Q}$ au sous-corps $\theta(\mathbb{Q})$ de $\mathbb{R}$. Cette identification est justifiée par :

— le fait que θ induit un isomorphisme de corps ordonné $\mathbb{Q} \to \theta(\mathbb{Q})$.

— le fait que, d'après la proposition du **1**.2.*1*., 1°, si (x_n) est une suite de rationnels qui converge vers un rationnel a, elle converge aussi en tant que suite de réels vers le réel a (et réciproquement).

Remarquons enfin qu'après cette identification, pour tout $X \in \mathbb{R}$ et tout représentant $(x_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ de X, on a : $\lim(x_n) = X$.

DÉFINITION. — **$\mathbb{Q}$ étant identifié à un sous-corps de $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont dits nombres irrationnels.**

3° THÉORÈME. — **Tout intervalle ouvert $]A, B[$ de $\mathbb{R}$, où $A < B$, contient au moins un rationnel. (On traduit cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).**

Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A < B$. Considérons le réel $C = (A+B)/2$. D'après le théorème du 2°, il existe une suite (c_n) de rationnels qui converge vers C dans $\mathbb{R}$. Considérant l'élément $(B-A)/2$ de $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $|C-c_N| < (B-A)/2$, ce qui implique $c_N \in]A, B[$. □

COROLLAIRE. — **$\mathbb{R}$ est un corps archimédien.**

Nous disposons déjà du corps totalement ordonné $\mathbb{R}$.

Soient $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $B \in \mathbb{R}$. On peut trouver des rationnels a et b tels que $a \in]0, A[$ et $b \in]B, B+1[$. $\mathbb{Q}$ étant archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b \leqslant na$. On a alors $B < b \leqslant na \leqslant nA$.

4° ***Partie entière.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Pour tout $X \in \mathbb{R}$, il existe un plus grand entier relatif $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant X$. On l'appelle partie entière de X; on le note $E(X)$.**

$\mathbb{R}$ étant archimédien, d'après $1 > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $X \leqslant n_0 \cdot 1 = n_0$ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant X$, on a : $n \leqslant n_0$.

De même, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $-X \leqslant n_1$, et donc $-n_1 \leqslant X$.

Ainsi $\{n \in \mathbb{Z} | n \leqslant X\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$; elle admet un plus grand élément. □

Notons que $E(X)$ est l'unique élément $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant X < m+1$.

5° THÉORÈME. — **Le corps $\mathbb{R}$ est complet.**

Soit (X_n) une suite de Cauchy de réels. D'après le théorème du 3° on peut, à tout $n \in \mathbb{N}$, associer un rationnel x_n tel que $|X_n - x_n| < 1/(n+1)$. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$|x_n - x_p| \leqslant |x_n - X_n| + |X_n - X_p| + |X_p - x_p|$$

et donc :

$$|x_n - x_p| \leqslant |X_n - X_p| + 1/(n+1) + 1/(p+1).$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \qquad \forall p \geqslant N \qquad |X_n - X_p| < \varepsilon/3.$$

$\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $N' \geqslant \max(N, 3/\varepsilon)$. On constate :

$$\forall n \geqslant N' \qquad \forall p \geqslant N' \qquad |x_n - x_p| < \varepsilon.$$

On en déduit que (x_n) est une suite de Cauchy de rationnels ; d'après le 2°, $X = \varphi((x_n))$ est la limite de (x_n) dans $\mathbb{R}$. Or :

$$|X_n - X| \leqslant |X_n - x_n| + |x_n - X| \leqslant 1/(n+1) + |x_n - X|.$$

On en déduit que X est limite de la suite (X_n) dans $\mathbb{R}$. □

REMARQUE. — Dorénavant nous n'aurons plus à utiliser la définition de $\mathbb{R}$ comme anneau-quotient : les propriétés de $\mathbb{R}$ dont nous disposons maintenant suffisent pour démontrer celles qui interviendront par la suite (cf. **1.3.**). Il n'est plus nécessaire d'utiliser des lettres majuscules pour désigner des nombres réels.

1.2.2. Propriétés liées à l'ordre

1° ***Ensembles adjacents.*** — DÉFINITION. — **Soient A et B des parties de $\mathbb{R}$. On dit que (A, B) est un couple d'ensembles adjacents si et seulement si :**

i) $\forall (a, b) \in A \times B \qquad a \leqslant b$

ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad \exists (a, b) \in A \times B \qquad b - a \leqslant \varepsilon$

THÉORÈME. — **Soit (A, B) un couple d'ensembles adjacents. Alors il existe un réel c et un seul tel que :**

$$\forall (a, b) \in A \times B \qquad a \leqslant c \leqslant b$$

— A tout $n \in \mathbb{N}$ nous pouvons associer un couple $(a_n, b_n) \in A \times B$ tel que

$$0 \leqslant b_n - a_n \leqslant 1/(n+1)$$

— Montrons que (a_n) est une suite de Cauchy (sur $\mathbb{R}$). Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ nous avons (d'après *i)*) $a_n \leqslant b_p$, et donc :

$$a_n - a_p \leqslant b_p - a_p \leqslant 1/(p+1),$$

et encore (après échange de n et p) : $|a_n - a_p| \leqslant \max\,[1/(n+1),\, 1/(p+1)]$ □

— La suite de Cauchy (a_n) admet une limite, que nous notons c.

De $\lim (a_n) = c$ et $\lim (b_n - a_n) = 0$ résulte $\lim (b_n) = c$.

Pour tout $b \in B$, de $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n \leqslant b)$ on déduit $c \leqslant b$. De même, pour tout $a \in A$, $a \leqslant c$.

— L'unicité résulte de ce que $(\forall (a, b) \in A \times B \;\; a \leqslant c < c' \leqslant b)$ impliquerait $(\forall (a, b) \in A \times B \;\; b - a \geqslant c' - c)$, en contradiction avec *ii)*. □

Notons : $c = \sup A$ et $c = \inf B$.

EXEMPLE. — *On appelle coupure toute partition* (A, B) de $\mathbb{R}$ *vérifiant* :

iii) $\forall (a, b) \in A \times B \qquad a < b.$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer qu'on peut associer à une telle partition un et un seul réel c tel que : $a \leqslant c \leqslant b$, pour tout $(a, b) \in A \times B$.

2° ***Suites adjacentes.*** — Rappelons que, par définition, une *suite croissante est une suite* (a_n) *telle que :*

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \qquad (n \leqslant p) \Longrightarrow (a_n \leqslant a_p)$$

Un raisonnement par récurrence permet de constater que cette condition équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant a_{n+1}$$

DÉFINITION. — **Soient (a_n) et (b_n) des suites de nombres réels. On dit que $((a_n), (b_n))$ est un couple de suites adjacentes si et seulement si :**

i) **(a_n) est une suite croissante, (b_n) une suite décroissante ;**

ii) $\lim (b_n - a_n) = 0$.

THÉORÈME. — **Soit $((a_n), (b_n))$ un couple de suites adjacentes. Alors (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont même limite.**

— Montrons que les images $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ des suites (a_n) et (b_n) sont telles que (A, B) soit un couple d'ensembles adjacents. Pour cela, vérifions par l'absurde : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad a_n \leqslant b_p$.

S'il existait $(n_0, p_0) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a_{n_0} > b_{p_0}$, on aurait, pour $n \geqslant \max(n_0, p_0)$

$$a_n \geqslant a_{n_0} > b_{p_0} \geqslant b_n, \quad \text{et donc} \quad |b_n - a_n| \geqslant a_{n_0} - b_{p_0} > 0$$

en contradiction avec $\lim (b_n - a_n) = 0$.

— Il existe donc $l \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant l \leqslant b_n$.

De $0 \leqslant l - a_n \leqslant b_n - a_n$ et $\lim (b_n - a_n) = 0$, on déduit $\lim (l - a_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim (a_n) = l$; on montre de même $\lim (b_n) = l$. □

REMARQUE. — On déduit de ce théorème, en prenant pour (b_n) (resp. (a_n)) une suite constante, que si une suite croissante (a_n) (resp. une suite décroissante (b_n)) admet une limite l, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant l \quad (\text{resp. } \forall n \in \mathbb{N} \quad l \leqslant b_n)$$

Application : le nombre e. — Si l'on considère les suites (x_n) et (y_n) étudiées au **1.1.2**, 1° comme à valeurs dans $\mathbb{R}$, $((x_n), (y_n))$ est un couple de suites adjacentes. Compte tenu du calcul fait au **1.1.2**, 1°, on peut énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **La suite de réels définie par :**

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

est convergente. Sa limite est un réel noté *e* **et appelé** *nombre d'Euler*. **On a :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 < e - x_n < 1/(n.n!)$$

En particulier, pour $n = 10$, on obtient l'encadrement :

$$2{,}718\,281\,8 < e < 2{,}718\,281\,83$$

3° ***Borne supérieure, borne inférieure.*** — THÉORÈME. — **Toute partie majorée (resp. minorée) et non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure).**

Considérons une partie A non vide, majorée de $\mathbb{R}$. Désignons par B l'ensemble des majorants de A. On a :

$$(B \neq \varnothing) \qquad \text{et} \qquad (\forall (a, b) \in A \times B \quad a \leqslant b).$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Fixons $b_0 \in B$ (ce qui est possible puisque $B \neq \emptyset$) et montrons que le sous-ensemble $I = \{n \in \mathbb{N} \mid b_0 - n\varepsilon \in B\}$ de $\mathbb{N}$, qui n'est pas vide puisque $0 \in I$, est majoré. D'après $A \neq \emptyset$, on peut fixer $a_0 \in A$. On a, pour tout $n \in I$:

$$a_0 \leqslant b_0 - n\varepsilon, \qquad \text{et donc} \qquad n \leqslant (b_0 - a_0)/\varepsilon.$$

I admet donc un plus grand élément, que nous notons n_0. En posant $b = b_0 - n_0\varepsilon$, on constate : $b \in B$ et $b - \varepsilon \notin B$.

Il existe donc $a \in A$ tel que : $b - \varepsilon < a$, ou $b - a < \varepsilon$. (A, B) est ainsi un couple d'ensembles adjacents. Soit M le réel défini par :

$$\forall (a, b) \in A \times B \qquad a \leqslant M \leqslant b$$

M est le plus petit majorant de A, et donc la borne supérieure de A. □

Dans le cas où $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et minorée, on constate que $-A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$ admet une borne supérieure M et que : $-M = \inf A$.

4° ***Convergence des suites monotones.*** — THÉORÈME. — **Soit (a_n) une suite croissante (resp. décroissante) de nombres réels. Pour qu'elle converge, il faut et il suffit qu'elle soit majorée (resp. minorée).**

La condition est nécessaire d'après la remarque du 2°.

La condition est suffisante. — Soit (a_n) une suite majorée et croissante. $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet une borne supérieure $l = \sup A$, notée également $l = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$.

Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, de l'existence de a_N vérifiant $l - \varepsilon < a_N \leqslant l$, on déduit :

$$\forall n \geqslant N \qquad l - \varepsilon < a_n \leqslant l \quad \text{ou encore} \quad |l - a_n| < \varepsilon. \qquad \square$$

5° ***Sous-groupes additifs de*** $\mathbb{R}$. — THÉORÈME I. — **Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}, +)$; un tel sous-groupe est dit discret.** Trivial.

THÉORÈME II. — **Les sous-groupes non discrets du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sont denses dans $\mathbb{R}$.**

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Si $G = \{0\}$, $G = a\mathbb{Z}$ avec $a = 0$. Supposons donc $G \neq \{0\}$, et considérons $F = G \cap \mathbb{R}_+^*$. F n'est pas vide car, pour tout $x \in G \setminus \{0\}$, x ou $-x$ est dans F. D'autre part F est minoré par 0 ; on peut donc poser $a = \inf F$, et on a : $a \in \mathbb{R}_+$. Deux cas sont possibles *a priori*.

— *Montrons que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$.* — Ici il existe $y \in F$ tel que $a \leqslant y < 2a$. Si on avait $a < y$, il existerait $z \in F$ tel que $a \leqslant z < y < 2a$, on aurait simultanément $y - z \in F$ et $0 < y - z < a$, en contradiction avec $a = \inf F$. Ainsi $a = y$ et donc $a \in G$, ce qui entraîne $a\mathbb{Z} \subset G$.

Soit maintenant x un élément quelconque de G. Notons $m = E(x/a)$; on a : $m \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant x - am < a$, ce qui — compte tenu de $(x - am) \in G$ — entraîne $x - am = 0$, et donc $x \in a\mathbb{Z}$. Ainsi $G \subset a\mathbb{Z}$. □

— *Montrons que si $a = 0$, alors G est dense dans* $\mathbb{R}$. — Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $x < y$. Il s'agit de montrer $]x, y[\cap G \neq \emptyset$.

D'après $\inf F = 0$ et $y - x > 0$, on peut trouver $z \in G$ tel que :

$$0 < z < y - x.$$

Notons $n = E(x/z)$; on a :

$$0 < (n+1)z - x \leqslant z < y - x.$$

On en tire $x < (n+1)z < y$, c'est-à-dire $(n+1)z \in]x, y[$. Or on a :

$$(n+1)z \in G. \qquad \square$$

EXEMPLE. — Si $G = \mathbb{Q}$, $a = \inf \mathbb{Q}_+^* = 0$, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE. — Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit P_f par :

$$P_f = \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)\}.$$

Montrer que P_f est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Lorsque $P_f \neq \{0\}$, on dit que f est périodique, et P_f est alors appelé *groupe des périodes de f*. Si P_f est de la forme $a\mathbb{Z}$, $(a > 0)$, a est appelé *plus petite période de f*.

Si f est continue, P_f est fermé. On en déduit que si f n'est pas constante, P_f est de la forme $a\mathbb{Z}$.

1.3. AUTRES PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{R}$

1.3.*1*. Une caractérisation de $\mathbb{R}$

THÉORÈME. — **Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif archimédien et complet. Alors il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{K}$, prolongeant l'identité de $\mathbb{Q}$ (quand on identifie $\mathbb{Q}$ au sous-corps premier de $\mathbb{R}$ et à celui de $\mathbb{K}$).**

Rappelons qu'un corps archimédien est totalement ordonné.

Notons e l'élément unité de $\mathbb{K}$ et rappelons que, $\mathbb{K}$ étant un corps ordonné il est de caractéristique nulle. On sait (I.3.4.*3*) qu'on définit un isomorphisme φ de $\mathbb{Q}$ sur le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{Q}$ $\varphi(x) = xe$ (pour $x \in \mathbb{Z}$, xe a été défini au I 1.5.*2*, pour $x = a/p \in \mathbb{Q}$, xe désigne $(ae)(pe)^{-1}$) ; l'application φ est strictement croissante, ce qui entraîne $|\varphi(x)| = \varphi(|x|)$.

Nous allons définir un isomorphisme $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, qui coïncide avec φ sur $\mathbb{Q}$.

a) LEMME. — **Soit (x_n) une suite de Cauchy (resp. une suite convergeant vers 0) dans $\mathbb{Q}$. Alors $(x_n e)$ est une suite de Cauchy (resp. une suite convergeant vers 0) dans $\mathbb{K}$.**

Limitons nous au cas où (x_n) est une suite de Cauchy (l'autre partie du lemme se démontrant de la même façon).

Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}_+^*$. Comme $\mathbb{K}$ est archimédien, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $e < k\varepsilon$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{k}\right) e < \varepsilon$. Or, (x_n) étant une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \qquad \forall p \geqslant N \qquad |x_n - x_p| < 1/k$$

Ecrivons : $|\varphi(x_n) - \varphi(x_p)| = |(x_n - x_p)e| = |x_n - x_p| e$

D'où : $\forall n \geqslant N \qquad \forall p \geqslant N \qquad |\varphi(x_n) - \varphi(x_p)| < (1/k)e < \varepsilon$.

b) DÉFINITION DE $\widetilde{\varphi}$. — Soit $x \in \mathbb{R}$. Si (x_n) et (y_n) sont deux suites de Cauchy de rationnels admettant x pour limite, $\varphi(x_n)$ et $\varphi(y_n)$ sont, d'après le lemme, deux suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$. De $\lim (x_n - y_n) = 0_{\mathbb{Q}}$, on déduit, d'après le lemme : $\lim \varphi(x_n - y_n) = 0_{\mathbb{K}}$, ce qui s'écrit :

$$\lim (\varphi(x_n) - \varphi(y_n)) = 0_{\mathbb{K}}, \quad \text{et donc} \quad \lim (\varphi(x_n)) = \lim (\varphi(y_n))$$

(on sait en effet que toute suite de Cauchy sur $\mathbb{K}$ est convergente).

On définit donc $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ en associant à tout $x \in \mathbb{R}$ la limite de la suite $(\varphi(x_n))$, où (x_n) est l'une quelconque des suites de Cauchy de rationnels qui admettent x pour limite. Il est immédiat que $\widetilde{\varphi}$ coïncide avec φ sur $\mathbb{Q}$; en particulier $\widetilde{\varphi}(1) = e$.

c) ETUDE DE $\widetilde{\varphi}$. — Nous utilisons le fait que φ est un morphisme, et le théorème IV du **1**.1.*1*, 4°.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$. Associons leur des suites de Cauchy de rationnels (x_n) et (y_n) qui convergent respectivement vers x et y. On a :

$$\widetilde{\varphi}(x+y) = \lim \varphi(x_n+y_n) = \lim [\varphi(x_n)+\varphi(y_n)] = \lim \varphi(x_n)+\lim \varphi(y_n) = \widetilde{\varphi}(x)+\widetilde{\varphi}(y)$$
$$\widetilde{\varphi}(xy) = \lim \varphi(x_ny_n) = \lim [\varphi(x_n)\cdot\varphi(y_n)] = \lim \varphi(x_n) \lim \varphi(y_n) = \widetilde{\varphi}(x)\cdot\widetilde{\varphi}(y)$$

Il nous reste à montrer que $\widetilde{\varphi}$ est surjective pour être en mesure d'affirmer (I.3.4.*4*, 3°) que $\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{K}$.

— En reprenant la définition de la partie entière (**1**.2.*1*, 4°), on constate qu'elle peut être étendue de $\mathbb{R}$ à tout corps archimédien, et, en particulier, à $\mathbb{K}$. A l'élément $a \in \mathbb{K}$, on associe $E(a) \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$E(a)\cdot e \leqslant a < (E(a)+1)\cdot e.$$

— Donnons nous $a \in \mathbb{K}$, et étudions $\varphi^{-1}(a)$.

Considérons le rationnel $x_n = 2^{-n}E(2^na)$. Nous avons :

$$E(2^na)\cdot e \leqslant 2^na < (E(2^na)+1)\cdot e \qquad (1)$$

D'où : $x_ne \leqslant a < x_ne+2^{-n}e$, et donc : $0 \leqslant a-x_ne < 2^{-n}e$.

Comme, d'après le lemme, $\lim (2^{-n}e) = 0$, on en déduit :

$$a = \lim (x_ne) = \lim \varphi(x_n).$$

De (1) on déduit, par ailleurs :

$$2E(2^na) \leqslant E(2^{n+1}a) < 2(E(2^na)+1)$$

Après multiplication par $2^{-(n+1)}$:

$$x_n \leqslant x_{n+1} < x_n+2^{-n}, \qquad \text{et donc :} \qquad 0 \leqslant x_{n+1}-x_n < 2^{-n}$$

Si n et p sont deux naturels tels que $0 < n < p$, on peut écrire :

$$x_p-x_n = \sum_{k=n}^{p-1} (x_{k+1}-x_k), \qquad \text{et donc} \qquad 0 \leqslant x_p-x_n < \sum_{k=n}^{p-1} 2^{-k}.$$

Comme $\sum_{k=n}^{p-1} 2^{-k} < 2^{1-n} < \frac{2}{n}$, (x_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Elle admet une limite dans $\mathbb{R}$, que nous notons x.

De $a = \lim \varphi(x_n)$ et $x = \lim x_n$, on déduit $a = \widetilde{\varphi}(x)$. Ainsi $\widetilde{\varphi}$ est surjective.

d) On démontre que l'isomorphisme φ construit ci-dessus est unique (*cf. prolongement d'une application continue*). □

e) La commutativité de $\mathbb{K}$ n'est pas essentielle. En généralisant le **1**.1.*1*. à un corps non nécessairement commutatif, on peut montrer que tout corps archimédien et complet est isomorphe à $\mathbb{R}$ (donc commutatif).

CONSEQUENCE. — Dans la mesure où on aboutit à un corps archimédien et complet, le choix de la méthode utilisée pour construire un « ensemble de nombres réels » est indifférent : à un isomorphisme près, on aboutit à « notre » ensemble $\mathbb{R}$.

1.3.*2*. Représentation p-adique des réels

1° Dans tout le paragraphe, p désigne un entier $\geqslant 2$, fixé. En remarquant, d'après la formule du binôme de Newton (I.3.1.*2*, 3°), que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p^n \geqslant 1+n(p-1)$, on vérifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} p^{-n} = 0$.

THÉORÈME. — **A tout réel x on associe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les rationnels**

$$x_n = p^{-n}E(p^n x) \qquad \text{et} \qquad y_n = x_n + p^{-n}$$

qui sont appelés valeurs approchées de x, à p^{-n} près, respectivement par défaut et par excès. Alors $((x_n), (y_n))$ est un couple de suites adjacentes, et on a :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_n \leqslant x < y_n) \qquad \text{et} \qquad (\lim (x_n) = \lim (y_n) = x)$$

Par définition de la partie entière :

$$E(p^n x) \quad \leqslant p^n x \quad < E(p^n x) + 1 \tag{1}$$

$$E(p^{n+1} x) \leqslant p^{n+1} x < E(p^{n+1} x) + 1. \tag{2}$$

La relation (1) s'écrit : $x_n \leqslant x < y_n$.

Par multiplication de (1) par p :

$$p\, E(p^n x) \leqslant p^{n+1} x < p\, E(p^n x) + p. \tag{3}$$

D'où : $p\, E(p^n x) \leqslant E(p^{n+1} x)$, et donc $x_n \leqslant x_{n+1}$

$E(p^{n+1} x) + 1 \leqslant p\, E(p^n x) + p$, et donc $y_{n+1} \leqslant y_n$.

Compte tenu de $y_n - x_n = p^{-n}$, on constate que $((x_n), (y_n))$ est un couple de suites adjacentes. Comme $x_n \leqslant x < y_n$, la limite commune des deux suites est x. □

2° ***Développement p-adique d'un réel.*** — A l'entier $p \geqslant 2$, nous associons l'ensemble $\mathcal{E}_p$ des suites (α_n) d'entiers vérifiant :

i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $0 \leqslant \alpha_n < p$;

ii) $\forall\, N \in \mathbb{N} \qquad \exists\, n \geqslant N \qquad \alpha_n \neq p - 1$.

a) Donnons nous $x \in \mathbb{R}$ et associons à x les suites (x_n) et (y_n) introduites au 1°, ainsi que la suite (a_n) définie par :

$$a_0 = E(x)\,; \qquad a_{n+1} = E(p^{n+1} x) - p\, E(p^n x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

D'après (3), on a : $0 \leqslant a_{n+1} < p$. En raisonnant par récurrence et en utilisant $x_{n+1} = x_n + a_{n+1} p^{-(n+1)}$, on obtient :

$$x_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k p^{-k}$$

Compte tenu de $\lim x_n = x$, on en déduit :

$$x = a_0 + \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k p^{-k}, \quad \text{que l'on écrit} \quad x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k p^{-k} \tag{4}$$

— Montrons que la suite (a_n) est un élément de $\mathcal{E}_p$.

Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = p-1$ dès que $n > N$. Il en résulte :

$$\forall n > N \qquad x_n - x_N = \sum_{k=N+1}^{n} (p-1)p^{-k} = p^{-N} - p^{-n}$$

et $\qquad \forall n \geqslant N \qquad y_n = y_N.$

La limite x de la suite (y_n) est donc égale à y_N, ce qui constitue une contradiction avec : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad x < y_n$. □

b) Nous allons maintenant démontrer :

THÉORÈME. — **L'application δ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}_p$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe la suite (a_n) :**

$$a_0 = E(x); \qquad a_{n+1} = E(p^{n+1}x) - pE(p^n x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

est une bijection. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k p^{-k} \tag{4}$$

On dit que (4) est le développement p-adique de x.

Cette bijection est à l'origine de la notation $x = a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ qui est dite « écriture p-adique illimitée du réel x », et « écriture décimale illimitée » dans le cas $p = 10$.

Démonstration. — L'existence de δ et la formule (4) étant acquises d'après *a*), il reste à montrer que δ est une bijection. Partons de $(a_n) \in \mathcal{E}_p$. Posons $u_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k p^{-k}$ et $v_n = u_n + p^{-n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où : $u_{n+1} - u_n = a_{n+1}p^{-(n+1)}$; $v_n - v_{n-1} = (-a_{n+1} + p - 1)p^{-(n+1)}$

Comme $0 \leqslant a_k < p$ dès que $k \geqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant u_{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} \leqslant v_n.$$

D'autre part $v_n - u_n = p^{-n}$ entraîne $\lim (v_n - u_n) = 0$. Il en résulte que $((u_n), (v_n))$ est un couple de suites adjacentes, et que les suites (u_n) et (v_n) admettent une limite commune $x \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant x \leqslant v_n \tag{5}$$

En fait on a même :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant x < v_n \tag{6}$$

(En effet l'existence de $m \in \mathbb{N}$ tel que $x = v_m$ entraînerait :

$$v_n = v_m \qquad \text{et donc} \qquad a_{n+1} = p - 1 \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant m$$

ce qui serait en contradiction avec le *ii*) de la définition de $\mathcal{E}_p$).

Comme $p^n u_n$, et donc $p^n v_n = p^n u_n + 1$ sont des entiers, (6) montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont les valeurs approchées du réel x à p^{-n} près par défaut et par excès.

— Notons φ l'application de $\mathscr{E}_p$ dans $\mathbb{R}$ qui à la suite (a_n) associe le réel x. Nous voyons, de façon triviale que $\varphi \circ \delta$ et $\delta \circ \varphi$, sont respectivement l'application identique de $\mathbb{R}$ et celle de $\mathscr{E}$, ce qui prouve que δ est bijective et que $\delta^{-1} = \varphi$.

— L'étude montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, étant entendu que (a_n) désigne $\delta(x)$; et que (u_n) est associée à (a_n) comme ci-dessus :

$$x = \lim_{n \to +\infty} u_n = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k p^{-k}. \qquad \square$$

REMARQUE. — L'hypothèse *ii*) faite sur $\mathscr{E}_p$ ne sert qu'a passer de (5) à (6). La construction de $x = \varphi((a_n))$ et l'inégalité (5) subsistant lorsqu'on dispose d'un ensemble $\mathscr{E}'_p$ vérifiant uniquement *i*). On a encore $\varphi \circ \delta = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, mais on n'a pas nécessairement $\delta \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}'_p}$. (Il est classique que si on ne se limite pas aux développements décimaux « propres », le réel 1 est fourni par 0,99...9... et par 1,00...0...).

3° COROLLAIRE. — **L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.**

Faisons l'hypothèse (H) : il existe une bijection $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\psi(n)$ admet un développement p-adique ($p \geqslant 3$) :

$$\psi(n) = b_{n,0} + \sum_{1}^{+\infty} b_{n,k} p^{-k}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $a_k = 0$ si $b_{k,k} \neq 0$ et $a_k = 1$ si $b_{k,k} = 0$.

Le développement $a_0 + \sum_{1}^{+\infty} a_k p^{-k}$ détermine un réel x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x \neq \psi(n)$, puisque $a_n \neq b_{n,n}$; le réel x n'a pas d'antécédent par la bijection ψ, ce qui constitue une contradiction. L'hypothèse (H) est donc absurde. $\square$

1.3.3. Etude pratique des suites récurrentes de réels.

Dans ce paragraphe, nous supposerons connues du lecteur quelques notions élémentaires sur la monotonie et la continuité des fonctions numériques.

1° ***Position du problème.*** — On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et son ensemble de définition D.

On aura à utiliser l'ensemble $\mathfrak{D}$ des parties X de D stables par f (i.e. telles que $f(X) \subset X$). $\mathfrak{D}$ n'est pas vide car $\varnothing \in \mathfrak{D}$. On note $D_0 = \bigcup_{X \in \mathfrak{D}} X$.

On se propose :

— de trouver les $c \in D$ vérifiant la condition :

$$(u_0 = c) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)) \text{ définit une suite } U_c \qquad (1)$$

— pour c vérifiant (1) donné, d'étudier la suite U_c (monotonie, convergence, limite éventuelles).

2° PROPOSITION. — **D_0 est l'ensemble des $c \in D$ vérifiant (1).**

Remarquons d'abord $f(D_0) = \bigcup_{X \in \mathfrak{D}} f(X) \subset D_0$, donc $D_0 \in \mathfrak{D}$. D_0 est donc le plus grand élément de $\mathfrak{D}$ (pour l'inclusion). Il en résulte que si u_n est défini, et

$u_n \in D_0$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est défini et $u_{n+1} \in D_0$. Donc si $c \in D_0$, la suite U_c est définie.

Réciproquement supposons la suite U_c définie, et soit $X = \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ son image. On a : $X \subset D$ et $f(X) = \{ u_n \mid n \in \mathbb{N}^* \} \subset X$, donc $X \subset D_0$; la suite U_c a ses éléments dans D_0; en particulier $c \in D_0$. □

Points fixes de f. — Il s'agit des racines de l'équation $f(t) = t$, à l'inconnue $t \in D$. Notons que :

— si r est un point fixe de f, alors la suite U_r est définie (elle est constante); on a donc $r \in D_0$.

— dans le cas où f est continue, si pour $c \in D_0$ la suite U_c converge vers un point $l \in D$, alors (par continuité), $f(l) = l$, et l'on a $l \in D_0$ (a priori la suite pourrait converger vers un $l \in \mathbb{R} \setminus D$).

3° *Étude de la suite U_c, pour $c \in D_0$ donné.* — Nous allons étudier quelques cas favorables de monotonie et de convergence de la suite U_c.

a) *Cas où f est monotone.* — On vérifie aisément par récurrence, en utilisant $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$, que :

• Si f est croissante, (u_n) est monotone, croissante si $f(c) - c \geqslant 0$, décroissante si $f(c) - c \leqslant 0$. On peut préciser ce résultat si f est strictement croissante.

• Si f est décroissante, $u_{n+1} - u_n$ est alternativement positif et négatif. On dit que la suite est *oscillante.* Posons alors $g = f \circ f$; g est croissante. La suite (u_{2n}) est définie par récurrence par $v_{n+1} = g(v_n)$ et $v_0 = c$, tandis que la suite (u_{2n+1}) est définie par $w_{n+1} = g(w_n)$ et $w_0 = f(c)$. Elles sont donc toutes deux monotones.

En utilisant :

$$g(c) - c = f \circ f(c) - c \quad \text{et} \quad g(f(c)) - f(c) = f \circ f \circ f(c) - f(c)$$

on obtient :

$$[g(c) - c] . [g(f(c)) - f(c)] \leqslant 0.$$

Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont donc des sens de variation contraires.

b) *Cas où* f *est croissante et admet un point fixe* r.

Si $c \leqslant r$ (resp. $c \geqslant r$), on constate par récurrence, en utilisant $f(r) = r$, que l'on a $u_n \leqslant r$ (resp. $u_n \geqslant r$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc que la suite U_c admet r pour majorant (resp. minorant). Compte tenu de a), on a les deux cas de convergence (vers un point $l \in \mathbb{R}$) :

• $c \leqslant r$ et $f(c) \geqslant c$, U_c étant alors croissante et majorée,

• $c \geqslant r$ et $f(c) \leqslant c$, U_c étant alors décroissante et minorée.

En particulier, soit f une application continue et croissante d'un segment $S = [a, b]$, $a < b$, de ℝ dans ℝ telle que $f(S) \subset S$, ce qui se traduit clairement par $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$ (ici $D_0 = S$). Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $t \to f(t) - t$ montre que f admet au moins un point fixe. Le lecteur vérifiera que, pour $c \in S$, si $f(c) \geqslant c$ (resp. $f(c) \leqslant c$) la suite U_c converge vers le plus petit (resp. le plus grand) point fixe de f contenu dans $[c, b]$ (resp. dans $[a, c]$).

• (Voir, pour plus de détails : **2.4.3**, 1°, théorème du point fixe pour une application contractante, et **5.3.3**, calcul approché d'un zéro d'une fonction.)

*2° Exemples. — *a)* $f(t) = \sqrt{t+2}$. Ici $D = [-2, +\infty[$, avec $f(D) \subset D$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur D. La suite (u_n) est définie pour tout $c \in D$. Elle est monotone. Puisque $u_1 = \sqrt{2+c} \geqslant 0$ on peut supposer $c \geqslant 0$.

On vérifie aisément sgn $(\sqrt{c+2} - c) = $ sgn $(2-c)$. En particulier 2 est la seule racine de $f(t) = t$. Il en résulte :

— pour $c < 2$, la suite est strictement croissante, majorée par 2;

— pour $c = 2$, la suite est constante, et $u_n = 2$;

— pour $a > 2$, la suite est strictement décroissante, minorée par 2.

Dans tous les cas, U_c converge vers 2.

b) $f(t) = \sqrt{2-t}$. Ici $D =]-\infty, 2]$, mais si on remarque que :

$$\forall t \in D \quad (f(t) \leqslant 2 \Longleftrightarrow t \in [-2, +2]), \quad \text{on en déduit} \quad D_0 = [-2, +2].$$

f est continue et strictement décroissante sur D_0, l'unique racine de $f(t) = t$ est $t_0 = 1$. La suite est oscillante.

Soit $c \in D_0$. En remarquant que pour $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$ et donc, pour $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2}$, il vient :

$$\forall n \geqslant 2 \quad u_{n+1} - 1 = \frac{1-u_n}{1+\sqrt{2-u_n}}, \qquad \text{et donc} \qquad \forall n \geqslant 2 \quad |u_{n+1}-1| \leqslant \frac{|u_n-1|}{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

On en conclut $|u_n - 1| \leqslant (1+\sqrt{2-\sqrt{2}})^{-n+2}|u_2-1|$ et ainsi : $1 = \lim u_n$.

Le lecteur vérifiera, à titre d'exercice, que $((u_{2n}), (u_{2n+1}))$ est un couple de suites adjacentes.*

Dans chacun de ces deux exemples le lecteur représentera aussi dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto f(t)$ et il placera dans ce plan les points de coordonnées :

$$(c, u_1), (u_1, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_2), (u_2, u_3), \ldots$$

En joignant ces points, il obtiendra une figure qui a l'allure :

— dans le premier cas, d'un escalier (ascendant si $c < 2$, descendant si $c > 2$);

— dans le second cas, d'une spirale.

3° ***Etude des suites homographiques.*** — Nous nous proposons d'étudier la suite de réels définie par la donnée de u_0 et la récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \tag{1}$$

avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{at+b}{ct+d}$. C'est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$.

Pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit définie pour tout n, il faut et il suffit que u_0 soit différent des termes de la suite définie par la récurrence

$$v_0 = -\frac{d}{c}, \qquad v_{n+1} = f^{-1}(v_n). \tag{2}$$

Notons que (2) peut comporter un nombre fini ou non de termes. Ainsi si $a+d = 0$, la suite (1) est définie pour tout n si et seulement si $u_0 \neq -\frac{d}{c}$.

— Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, on a :

$$\lim (u_{n+1}(cu_n+d)) = l(cl+d)\ ; \qquad \lim (au_n+b) = al+b$$

et l est solution de :

$$cx^2+(d-a)x-b = 0. \tag{3}$$

1er CAS : $(d-a)^2+4bc < 0$. (3) *n'a pas de racine dans* $\mathbb{R}$, la suite diverge.

2e CAS : $(d-a)^2+4bc > 0$. (3) *admet deux racines distinctes*, α et β.

On vérifie aisément :

$$(u_0 = \alpha) \Longleftrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha) \Longleftrightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha).$$

Si on suppose $u_0 \neq \alpha$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}-\beta}{u_{n+1}-\alpha} = \frac{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\dfrac{a\beta+b}{c\beta+d}}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}} = \frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\,\frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$$

et donc, si on pose $x_n = \dfrac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$ et $k = \dfrac{c\alpha+d}{c\beta+d}$:

$$x_0 = \frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}, \qquad x_{n+1} = kx_n. \tag{4}$$

On en déduit $x_n = k^n x_0$. D'où la discussion suivante (en remarquant que nécessairement $k \neq 1$) :

— Si $u_0 \in \{\alpha, \beta\}$ la suite est constante.

— Si $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$

i) si $|k| < 1$ $\quad \lim u_n = \beta$

ii) si $|k| > 1$ $\quad \lim u_n = \alpha$

iii) si $k = -1$ $\quad (u_n)$ diverge, et $u_n \in \{u_0, u_1\}$.

Notons que ce dernier cas ($k = -1$) correspond à $a+d = 0$, déjà rencontré.

3e CAS : $(d-a)^2+4bc = 0$. (3) *admet une racine double* $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$.

Remarquons : $(a+d)^2 = 4(ad-bc)$ et $c\alpha+d = \dfrac{a+d}{2}$; en écartant encore le cas $u_0 = \alpha$, on a :

$$\frac{1}{u_{n+1}-\alpha} = \frac{2(cu_n+d)}{(a+d)(u_n-\alpha)} = \frac{2c(u_n-\alpha)+2(c\alpha+d)}{(a+d)(u_n-\alpha)} = \frac{2c}{a+d}+\frac{1}{u_n-\alpha}$$

soit : $\quad \dfrac{1}{u_{n+1}-\alpha} = \dfrac{1}{u_n-\alpha}+k \qquad (k \neq 0).$

En posant $x_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$, on obtient $x_{n+1} = x_n + k$, d'où $x_n = x_0 + nk$.

On en déduit : $\lim (1/x_n) = 0$ et $\lim u_n = \alpha$, résultat d'ailleurs valable si $u_0 = \alpha$.

REMARQUE. — On peut faire cette étude dans le corps des complexes, le 1[er] cas étant alors sans objet.

EXERCICES

Le lecteur sera amené à utiliser quelques résultats acquis dans les classes terminales.

1.01. — Etudier les suites de réels définies par les relations de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2\,; \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a^2}{x_n}\right); \qquad x_{n+1} = \frac{a(1+a^2)}{1+x_n^2}\ (a > 0)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{x_n}}\,; \qquad x_{n+1} = \frac{1-x_n}{1+x_n^2}\,; \qquad x_{n+1} = a \sin x_n + b\ \ (|a| < 1)$$

$$x_{n+1} = \sin 2x_n\,; \qquad x_{n+1} = 1 - \cos x_n\,; \qquad x_{n+1} = \frac{-1}{1+x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}\,; \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{x_n + 4}\,; \qquad x_{n+1} = \frac{5x_n - 3}{x_n + 1}\,;$$

1.02. — Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit par récurrence les deux suites $(x_n)_{n \in N}$ et $(y_n)_{n \in N}$ par : $x_0 = a$, $y_0 = b$, et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n}.$$

Etudier ces deux suites et en déduire l'étude de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = (1+k)(1+k^2)\ldots(1+k^{2^n}) \qquad 0 < k < 1.$$

1.03. — Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Comparer les trois réels u_0, v_0, w_0 définis par :

$$\frac{3}{u_0} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\,; \qquad v_0 = \sqrt[3]{abc}\,; \qquad w_0 = \frac{a+b+c}{3}$$

Montrer que les trois suites définies par récurrence par :

$$\frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\,; \qquad v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}\,; \qquad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}$$

sont convergentes et ont même limite.

1.04. — Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\{-1, +1\}$. On lui associe la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels définie par :

$$a_n = \frac{\varepsilon_0}{1} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_0\ldots\varepsilon_n}{2^n}$$

a) Montrer que cette suite est convergente, de limite $a \in [-2, +2]$.

b) Montrer que réciproquement tout réel $a \in [-2, +2]$ est limite d'une suite du type précédent.

c) Montrer que pour $|h| \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sin 2h}$.

On considère alors :

$$x_n = \varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_{n-1}\sqrt{2+\varepsilon_n\sqrt{2}}}}$$

et $$y_n = 2\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_0\ldots\varepsilon_n}{2^n}\right)\right].$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Etudier le cas $\varepsilon_n = 1$ pour tout n. Retrouver directement ce résultat en remarquant que x_n peut être défini par une relation de récurrence simple.

1.05. — A toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, on associe la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}.$$

a) Etudier cette suite lorsque (a_n) est majorée.

b) On suppose $a_n = \lambda^{2^{n+1}}$ $(\lambda > 0)$. Montrer qu'alors $\lim x_n = \alpha\lambda$, α étant la limite de la suite associée à la suite constante $a_n = 1$. Montrer : $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$.

c) Etudier la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas :

$$a_n = n\,; \qquad a_n = n\,!\,; \qquad a_n = n^n$$

et, ensuite, dans le cas où il existe $\alpha > 2$ tel que, pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$ on ait : $a_n \geqslant \exp(\alpha^{n+1})$.

1.06. — Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Etudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_{n+p} = \sqrt[p]{x_{n+p-1}\,x_{n+p-2}\ldots x_n}$$

$x_0, \ldots, x_{p-1}$ étant des réels positifs donnés.

1.07. *a*) Etudier les sous-groupes multiplicatifs de $\mathbb{R}_+^*$.

b) On se propose de déterminer $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | x^2-2y^2 = 1\}$. Soit G l'ensemble des nombres $x+y\sqrt{2}$, où $(x, y) \in S$ et $x+y\sqrt{2} > 0$. Montrer que G est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$.

c) Soit $G' = G \cap]1, +\infty[$. Montrer qu'un élément $x+y\sqrt{2}$, avec $(x, y) \in S$, est dans G' si et seulement si $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que G' admet un plus petit élément, que l'on déterminera.

d) En déduire les éléments de S.

1.08. — Soit S l'ensemble des suites croissantes d'éléments de $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

a) Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$x_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \ldots + \frac{1}{q_0 \cdots q_n}$$

est convergente, et que sa limite a vérifie $a \in]0, 1]$.

b) Montrer que l'application qui à $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe $\lim x_n$ est une bijection de S sur $]0, 1]$.

c) Montrer que $\lim x_n$ est rationnel si et seulement s'il existe p tel que :

$$\forall\, n \geqslant p \qquad q_n = q_p.$$

1.09. — Montrer que tout isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur un de ses sous-corps est l'identité. (On montrera qu'un tel isomorphisme est nécessairement croissant).

1.10. — Soient deux réels a et b, non nuls. Quel est le sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par ces deux réels ? A quelle condition nécessaire et suffisante est-il discret ? En admettant que π est irrationnel en déduire que $\{\cos n | n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dense de $[-1, 1]$.

1.11. — *a*) Montrer que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'ensemble des rationnels de la forme $p/2^n$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1.12. — Soient E un ensemble infini et F une partie infinie de E telle que $E\backslash F$ soit au plus dénombrable. Montrer que F est équipotent à E. En déduire que l'ensemble des irrationnels est équipotent à $\mathbb{R}$.

1.13. — Tout rationnel r admet un unique représentant de la forme p/q avec $q \geqslant 1$ et p et q premiers entre eux. Soit (r_n) une suite de rationnels de limite un irrationnel positif; si l'on pose $r_n = p_n/q_n$ montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.

1.14. — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim (a_n) = 0$.

Montrer que $\{n \in \mathbb{N} | \forall\, m \geqslant n \;\; a_m \leqslant a_n\}$ est infini.

Montrer que $\{n \in \mathbb{N} | \forall\, m \leqslant n \;\; a_n \leqslant a_m\}$ est infini.

1.15. — Moyenne de Cesaro. — Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$ on définit :

$$b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \qquad \left(\text{resp. } c_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n^2}\right).$$

Montrer que si la suite (a_n) est convergente, la suite (b_n) est convergente (resp. (c_n) est convergente).

Plus généralement soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k = +\infty$. Montrer que si la suite (a_n) est convergente, la suite de terme général $d_n = \dfrac{\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n}{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}$ est convergente. Que pensez-vous de la réciproque ?

1.16. — Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes. Etudier la suite (c_n) avec $c_n = \dfrac{a_0 b_n + \ldots + a_p b_{n-p} + \ldots + a_n b_0}{n+1}$.

1.17. — Soit (a_n) la suite réelle définie par a_0 et $a_{n+1} = ka_n^2$. A quelles conditions portant sur a_0 et k la suite est-elle convergente?

1.18. — λ et γ étant deux réels différents de -1, à quelles conditions portant sur $(\lambda, \gamma, a_0, b_0)$ les deux suites définies par a_0 et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \lambda\, b_n}{1+\lambda}$ (resp. b_0 et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + \gamma\, b_n}{1+\gamma}$) constituent-elles un couple de suites adjacentes ?

1.19. — Soit E l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $x_1 \geqslant 2$ et $x_{n+1} \geqslant x_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on obtient une bijection de E sur $]1, 2]$ en posant $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + x_k^{-1}) \right)$.

2

ESPACES TOPOLOGIQUES ESPACES MÉTRIQUES

2.1. ESPACES TOPOLOGIQUES

2.1.*1*. Définition d'une topologie

1° *Espaces topologiques.* — DÉFINITION I. — **Soit E un ensemble. On appelle topologie sur E toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(E)$ satisfaisant aux axiomes suivants :**

$$(O_1) \quad \varnothing \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad E \in \mathcal{T}$$

$$(O_2) \quad \forall (A, B) \in \mathcal{T}^2 \qquad A \cap B \in \mathcal{T}$$

$$(O_3) \quad \forall I \quad \forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I \qquad \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$$

Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les ouverts de la topologie $\mathcal{T}$.

REMARQUE. — L'axiome (O_2) s'étend immédiatement par récurrence à l'intersection d'une famille finie non vide d'éléments de $\mathcal{T}$. D'ailleurs en renforçant (O_2) sous la forme : l'intersection de toute famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est élément de $\mathcal{T}$, on peut même considérer (O_1) comme une conséquence de (O_2) et (O_3); en effet (I.1.2.*4*) :

$$\bigcap_{i \in \varnothing} A_i = E ; \qquad \bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing.$$

DÉFINITION II. — **On appelle espace topologique tout couple $(E, \mathcal{T})$ où E est un ensemble et $\mathcal{T}$ une topologie sur E.**

Les éléments d'un espace topologique sont aussi appelés *points*. Les ouverts de $\mathcal{T}$ sont aussi appelés ouverts de $(E, \mathcal{T})$.

EXEMPLES. — *a*) Pour tout ensemble E, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ est une topologie, appelée *topologie discrète* : toute partie de E est un ouvert. On dit que $(E, \mathcal{P}(E))$ est un *espace discret*.

b) De même $\mathcal{T} = \{\varnothing, E\}$ est une topologie, appelée *topologie grossière*.

2° *Topologie de l'ordre.* — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné, et soit $\mathcal{J}$ la partie de $\mathcal{P}(E)$ constituée des intervalles ouverts, des demi-droites ouvertes et de E. L'ensemble $\mathcal{T}$ des réunions de familles d'éléments de $\mathcal{J}$ est une topologie, appelée topologie de l'ordre.**

— $E \in \mathcal{T}$ par définition de $\mathcal{J}$; $\varnothing$ est réunion de la famille vide d'éléments de $\mathcal{J}$ (I.1.2.*4*, 1°).

— On vérifie aisément que $\mathcal{J}$ est stable par intersection finie. Il en résulte que si $A = \bigcup_{k \in K} I_k$ et $B = \bigcup_{l \in L} J_l$ sont deux éléments de $\mathcal{T}$ ($I_k \in \mathcal{J}$ et $J_l \in \mathcal{J}$), alors $A \cap B = \bigcup_{(k, l) \in K \times L} (I_k \cap J_l)$ est encore un élément de $\mathcal{T}$.

— Enfin soit $(A_j)_{j \in J}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, de la forme

$$A_j = \bigcup_{k \in K_j} I_{k,j}.$$

On peut écrire : $$\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{(k,j) \in L} I_{k,j}$$

où L est l'ensemble des couples (k, j) tels que $j \in J$ et $k \in K_j$.

Donc : $$\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}.$$ □

EXEMPLE. — On peut appliquer cette construction à $(\mathbb{R}, \leqslant)$. On obtient une topologie $\mathcal{T}$ appelée *topologie usuelle* de $\mathbb{R}$.

Convention. — Dans la suite (sauf indication du contraire) $\mathbb{R}$ sera toujours muni de la topologie usuelle.

3° ***Caractérisation des ouverts de la topologie de l'ordre.*** — PROPOSITION. — **Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné, $\mathcal{T}$ la topologie de l'ordre et A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) **A est un ouvert de la topologie $\mathcal{T}$.**

ii) **Pour tout $a \in A$, il existe $I \in \mathfrak{I}$ tel que $\{a\} \subset I \subset A$.**

i) $\Longrightarrow$ *ii*). Conséquence de la définition de $\mathcal{T}$.

ii) $\Longrightarrow$ *i*). Pour tout $a \in A$, notons I_a un élément de $\mathfrak{I}$ tel que

$$\{a\} \subset I_a \subset A.$$

De $I_a \subset A$ on tire $\bigcup_{a \in A} I_a \subset A$, et de $a \in I_a$ on déduit : $A \subset \bigcup_{a \in A} I_a$.

Donc $$A = \bigcup_{a \in A} I_a \in \mathcal{T}.$$ □

REMARQUE. — Le lecteur vérifiera que, dans le cas $E = \mathbb{R}$, *i*) et *ii*) sont encore équivalentes à :

iii) $\forall\, a \in A \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad]a-\alpha, a+\alpha[\ \subset A.$

2.1.2. Fermés. Voisinages. Bases de voisinages

1° ***Fermés.*** — DÉFINITION. — **Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle fermé de cet espace topologique toute partie de E dont le complémentaire est ouvert.**

EXEMPLES. — *a*) Toute partie d'un espace discret est un fermé (et un ouvert).

b) Dans un espace muni de la topologie de l'ordre, un intervalle fermé (resp. une demi-droite fermée) est un fermé. Les deux utilisations du mot « fermé » ne créent donc pas d'ambiguïté.

c) Par contre, l'intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ n'est ni un ouvert ni un fermé.

PROPOSITION. — **Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés de $(E, \mathcal{T})$ possède les propriétés suivantes :**

(F_1) $\quad \emptyset \in \mathcal{F}$ et $E \in \mathcal{F}$

(F_2) $\quad \forall (A, B) \in \mathcal{F}^2 \qquad A \cup B \in \mathcal{F}$

(F_3) $\quad \forall I \quad \forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I \qquad \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}.$

Résulte des axiomes (O_1), (O_2), (O_3) par passage au complémentaire. Par récurrence, (F_2) s'étend à la réunion d'une famille finie de fermés.

2° QUELQUES REMARQUES. — *a*) Le lecteur prendra soin de bien remarquer que « être ouvert » n'est pas la négation de « être fermé ». Il résulte des exemples ci-dessus qu'un ensemble peut être un ouvert *et* un fermé, et qu'un ensemble peut n'être ni un ouvert ni un fermé.

b) Pas plus que l'axiome (O_2), la propriété (F_2) ne se généralise à une famille quelconque. Donnons deux exemples dans $\mathbb{R}$:

— $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$ n'est pas un ouvert.

— $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]-1, +1[$ n'est pas un fermé.

3° ***Voisinages. Bases de voisinages.*** — DÉFINITION I. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et a un point de E. On appelle voisinage de a toute partie V de E telle qu'il existe un ouvert U de $\mathcal{T}$ vérifiant : $\{a\} \subset U \subset V$.**

L'ensemble des voisinages de a se note $\mathcal{V}(a)$.

On remarquera : $E \in \mathcal{V}(a)$ et $\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad a \in V$.

DÉFINITION II. — **Avec les mêmes notations, on appelle base de voisinages de a toute partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(a)$ telle que :**

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad B \subset V$$

EXEMPLES — *a*) Dans $\mathbb{R}$, V est un voisinage de a si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset V$. L'ensemble des intervalles de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, est une base de voisinages de a. L'ensemble des intervalles de la forme $[a-\alpha, a+\alpha]$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et l'ensemble des intervalles de la forme $\left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont aussi des bases de voisinages de a.

b) Dans un espace topologique quelconque, $\mathcal{V}(a)$ d'une part, l'ensemble des voisinages ouverts de a d'autre part, sont des bases de voisinages de a.

c) Dans un espace discret, $\{a\}$ est un voisinage de a.

PROPOSITION. — **Dans tout espace topologique, l'ensemble $\mathcal{V}(a)$ des voisinages de a possède les propriétés suivantes :**

i) $\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall W \in \mathcal{P}(E) \qquad (W \supset V \implies W \in \mathcal{V}(a))$

ii) $\forall (V, W) \in [\mathcal{V}(a)]^2 \qquad V \cap W \in \mathcal{V}(a)$.

i) Simple conséquence de la définition I.

ii) Il existe par hypothèse deux ouverts A et B, tels que :

$$\{a\} \subset A \subset V \qquad \text{et} \qquad \{a\} \subset B \subset W.$$

Il en résulte : $\{a\} \subset A \cap B \subset V \cap W$, avec $A \cap B$ ouvert. □

Cette assertion se généralise à une intersection finie de voisinages de a.

4° ***Caractérisation des ouverts.*** — PROPOSITION. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de E. A est ouvert si et seulement s'il est un voisinage de chacun de ses points.**

— Si A est ouvert, pour tout point a de A : $\{a\} \subset A \subset A$.

— Si A est voisinage de chacun de ses points, à tout $a \in A$ on peut associer un ouvert U_a tel que $\{a\} \subset U_a \subset A$.

On a : $A = \bigcup_{a \in A} U_a$, et donc : A ouvert □

5° ***Espaces topologiques séparés.*** — DÉFINITION. — **Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit séparé si et seulement si, pour tout couple $(a, b) \in E^2$, il existe un voisinage de a et un voisinage de b disjoints.**

On dit que de tels voisinages « séparent » a et b.

EXEMPLE. — $\mathbb{R}$ est séparé.

THÉORÈME. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé, et a un point de E. L'ensemble $\{a\}$ est un fermé de $(E, \mathcal{T})$.**

On vérifie aisément que $E \backslash \{a\}$ est un ouvert □.

REMARQUE. — La réciproque de ce théorème est fausse.

Au niveau de ce cours nous ne rencontrerons que des espaces topologiques séparés.

2.1.3. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie

1° ***Intérieur.*** — DÉFINITION. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, A une partie de E. Un point a de E est dit intérieur à A si et seulement si A est un voisinage de a. On appelle intérieur de A, et on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.**

EXEMPLES. — *a*) Dans $\mathbb{R}$, l'intérieur d'un intervalle (resp. d'une demi-droite) est l'intervalle ouvert (resp. la demi-droite ouverte) de mêmes bornes. L'intérieur de $\mathbb{Q}$ est $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$.

b) Dans tout espace topologique $(E, \mathcal{T})$, $\mathring{E} = E$ et $\mathring{\varnothing} = \varnothing$.

PROPOSITION I. — **L'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts de $(E, \mathcal{T})$ contenus dans A. C'est donc un ouvert, et c'est le plus grand des ouverts contenus dans A.**

Soit A' la réunion de tous les ouverts de $(E, \mathcal{T})$ contenus dans A.

Un élément $a \in E$ appartient à A' si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $\{a\} \subset U \subset A$, donc si et seulement si $a \in \mathring{A}$. □

PROPOSITION II. — **Soient A et B des parties de l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$. On a alors :**

$$i)\ \mathring{A} \subset A \qquad ii)\ (A = \mathring{A}) \Longleftrightarrow A \in \mathcal{T} \qquad iii)\ \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$$

$$iv)\ (A \subset B) \Longrightarrow (\mathring{A} \subset \mathring{B}) \qquad v)\ \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

Prouvons *iv*) et *v*) :

— Si $A \subset B$, d'après *i*) : $\mathring{A} \subset B$. $\mathring{A}$ étant un ouvert $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

— $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$, donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

Inversement $A \cap B \subset A$ donne $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A}$; de même $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{B}$. □

2° ***Adhérence.*** — DÉFINITION. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, A une partie de E. Un point a de E est dit adhérent à A si et seulement si :**

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \qquad V \cap A \neq \emptyset.$$

On appelle adhérence de A, et on note $\bar{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.

EXEMPLE. — Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence d'un intervalle (resp. d'une demi-droite) est l'intervalle fermé (resp. la demi-droite fermée) de mêmes bornes.

REMARQUE. — a est adhérent à A si et seulement si, $\mathcal{B}$ désignant une base de voisinages de a :

$$\forall V \in \mathcal{B} \qquad V \cap A \neq \emptyset.$$

PROPOSITION I. — **Pour toute partie A de E :**

$$E\backslash\bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{E\backslash A}}$$

$$E\backslash\mathring{A} = \overline{E\backslash A}.$$

Ces assertions résultent immédiatement des définitions, en remarquant que $V \cap A = \emptyset$ s'écrit aussi $V \subset E\backslash A$.

De cette proposition, on déduit immédiatement les deux propositions suivantes :

PROPOSITION II. — **L'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés de $(E, \mathcal{T})$ qui contiennent A. C'est donc un fermé, et c'est le plus petit fermé contenant A.**

PROPOSITION III. — **Soient A et B des parties de l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$. On a alors :**

$$i)\ A \subset \bar{A} \qquad ii)\ (A = \bar{A}) \Longleftrightarrow (A \text{ est un fermé de } (E, \mathcal{T})) \qquad iii)\ \bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

$$iv)\ (A \subset B) \Longrightarrow (\bar{A} \subset \bar{B}) \qquad v)\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

REMARQUES. — *a*) On se gardera de croire que le passage à l'intérieur et le passage à l'adhérence sont des opérations réciproques l'une de l'autre. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}}^{\circ} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathring{\mathbb{Q}}} = \emptyset$.

b) A et B étant deux parties de l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ on a uniquement :

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \widehat{A \cup B}^{\circ} \qquad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

Le lecteur trouvera dans $\mathbb{R}$ des exemples montrant que ces inclusions peuvent être strictes.

3° ***Frontière, partie dense.*** —DÉFINITION I. — **Soit A une partie de l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$. On appelle frontière de A, et on note $\mathrm{Fr}(A)$, l'ensemble**

$$\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{E\backslash A} = \bar{A} \cap (E\backslash \mathring{A}) = \bar{A}\backslash \mathring{A}.$$

La frontière de A est donc un fermé de $(E, \mathcal{T})$. Les éléments de $\mathrm{Fr}(A)$, appelés *points-frontière*, sont les éléments de E dont tout voisinage contient des points de A et des points de $E\backslash A$ (ce qui justifie la terminologie).

EXEMPLES. — Dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{Fr}([a, b]) = \{a, b\}$; $\mathrm{Fr}(\mathbb{R}) = \emptyset$; $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

REMARQUE. — On appelle *extérieur de A*, l'intérieur de $E\backslash A$.

On a : $$\mathrm{Fr}(A) = E\backslash(\mathring{A} \cup \widehat{E\backslash A}^{\circ})$$

DÉFINITION II. — **On appelle partie dense d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ toute partie A de E telle que $\bar{A} = E$.**

EXEMPLE. — $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Le lecteur remarquera que cette affirmation, prise ici au sens topologique pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, coïncide avec celle de la proposition 1.2.*1*, 3°.

PROPOSITION. — **Une partie A de E est dense dans E si et seulement si elle rencontre tous les ouverts non vides de E.**

— Si A est dense, et si U est un ouvert non vide de E, on dispose de $a \in U$, et on a : $a \in \bar{A}$. De $U \in \mathcal{V}(a)$ on tire $A \cap U \neq \emptyset$.

— Si A rencontre tout ouvert non vide, tout voisinage ouvert de $a \in E$ rencontre A, donc $a \in \bar{A}$. Il en résulte $E \subset \bar{A}$ et $E = \bar{A}$. □

2.1.*4*. Sous-espaces topologiques

1° ***Topologie induite.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, et F une partie de E. L'ensemble $\mathcal{T}_F$ des parties de F de la forme $U \cap F$, où $U \in \mathcal{T}$, est une topologie sur F. On l'appelle topologie induite sur F par $\mathcal{T}$. L'espace $(F, \mathcal{T}_F)$ est appelé sous-espace topologique de $(E, \mathcal{T})$.**

Démonstration facile, laissée au lecteur. □

2° ***Propriétés.*** — a) *Les fermés de l'espace $(F, \mathcal{T}_F)$ sont les traces sur F des fermés de $(E, \mathcal{T})$.*

Vérification immédiate.

b) *Les voisinages de $a \in F$ dans l'espace $(F, \mathcal{T}_F)$ sont les traces sur F des voisinages de a dans l'espace $(E, \mathcal{T})$.*

— Si V est un voisinage de a dans $(E, \mathcal{T})$, alors $\{a\} \subset U \subset V$, avec $U \in \mathcal{T}$. Il en résulte $\{a\} \subset U \cap F \subset V \cap F$. Comme $U \cap F \in \mathcal{T}_F$, $V \cap F$ est un voisinage de a dans $(F, \mathcal{T}_F)$.

— Inversement soit W un voisinage de a dans $(F, \mathcal{T}_F)$. Il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $\{a\} \subset U \cap F \subset W$. Posons $V = W \cup U$. Comme $\{a\} \subset U \subset V$, V est un voisinage de a dans $(E, \mathcal{T})$ et d'autre part $W = V \cap F$. □

c) *Soit A une partie de F. Notons $\bar{A}$ l'adhérence de A dans l'espace $(E, \mathcal{T})$ et $\bar{A}_F$ l'adhérence de A dans l'espace $(F, \mathcal{T}_F)$. Alors $\bar{A}_F = \bar{A} \cap F$.*

— $\bar{A} \cap F$ est un fermé de $(F, \mathcal{T}_F)$ qui contient A. Donc $\bar{A}_F \subset \bar{A} \cap F$.

— Inversement, soit $a \in \bar{A} \cap F$. Soit $V \cap F$ un voisinage de a dans $(F, \mathcal{T}_F)$, V étant voisinage de a dans $(E, \mathcal{T})$. De $A \subset F$ on déduit :

$$(V \cap F) \cap A = V \cap A.$$

Or $V \cap A \neq \emptyset$ car $a \in \bar{A}$. Donc $a \in \bar{A}_F$, et $\bar{A} \cap F \subset \bar{A}_F$. □

REMARQUE. — On aura soin de ne pas étendre cette propriété à l'intérieur. Ainsi, pour $E = \mathbb{R}$, $F = [0, 1[$ et $A = F$: $\mathring{A}_F = [0, 1[$ et $\mathring{A} =]0, 1[$. On constate : $\mathring{A}_F \neq \mathring{A} \cap F$.

d) *Pour qu'une partie A de F soit dense dans $(F, \mathcal{T}_F)$, il faut et il suffit que $F \subset \bar{A}$.*

$$\bar{A}_F = F \quad \text{s'écrit} \quad \bar{A} \cap F = F, \quad \text{soit} \quad F \subset \bar{A}. \quad □$$

e) *Si $(E, \mathcal{T})$ est séparé, $(F, \mathcal{T}_F)$ est séparé.*

Vérification immédiate.

f) *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et F une partie de E. Pour que les ouverts (resp. les fermés) de $(F, \mathcal{T}_F)$ soient les ouverts (resp. les fermés) de $(E, \mathcal{T})$ contenus dans F, il faut et il suffit que F soit un ouvert (resp. un fermé) de $(E, \mathcal{T})$.*

Vérification immédiate.

3° PROPOSITION. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, F et G deux parties de E telles que $G \subset F \subset E$. La topologie induite sur G par celle de E est la même que la topologie induite sur G par la topologie induite sur F par celle de E.**

Vérification aisée. Dans cette situation, nous pourrons parler du *sous-espace topologique G*, sans risque d'ambiguïté.

4° ***Points isolés ; points d'accumulation.*** — DÉFINITION. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, et F une partie de E.**

i) **Un point $a \in F$ est dit isolé (dans F relativement à E) si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $F \cap V = \{a\}$.**

ii) **Un point $a \in E$ est dit point d'accumulation de F si et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, $F \cap V$ est un ensemble infini.**

Dans le cas où $(E, \mathcal{T})$ est séparé, on peut remplacer *ii*) par :

iii) **Un point $a \in E$ est dit point d'accumulateur de F si et seulement si chaque $V \in \mathcal{V}(a)$ contient au moins un point de $F \setminus \{a\}$.**

— Il est clair que si $a \in E$ vérifie *ii*), alors a vérifie *iii*).

— Inversement soit $a \in E$ qui vérifie *iii*). Considérons $V \in \mathcal{V}(a)$; nous allons construire par récurrence une suite d'éléments deux à deux distincts de $W = (F \setminus \{a\}) \cap V$. Nous pourrons alors affirmer que a vérifie *ii*).

D'après *iii*), il existe un point $x_1 \in W$; supposons obtenue une famille $(x_1, ..., x_n)$ de points deux à deux distincts de W; $(E, \mathcal{T})$ étant séparé, $\{x_1, ..., x_n\}$ en est un fermé (2.1.2, 5°), qui admet donc pour complémentaire dans E un ouvert V_n de $(E, \mathcal{T})$; ce dernier contient a; on a $V_n \in \mathcal{V}(a)$ et $V \cap V_n \in \mathcal{V}(a)$; d'après *iii*), il existe un point $x_{n+1} \in W \cap V_n$; au titre d'élément de V_n, x_{n+1} n'appartient pas à $\{x_1, ..., x_n\}$. □

2.1.5. Espaces produits

1° ***Ouverts élémentaires.*** — Considérons une famille $(E_i, \mathcal{T}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'espaces topologiques, et soit E l'ensemble produit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$. On appelle *ouvert élémentaire* toute partie de E de la forme $\omega = \prod_{i=1}^{n} A_i$, où $A_i \in \mathcal{T}_i$ pour $i \in \mathbb{N}_n$. L'intersection de deux ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire. En effet :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i) \qquad \text{et} \qquad A_i \cap B_i \in \mathcal{T}_i$$

2° Théorème et définition. — **En conservant les notations précédentes, les réunions d'ouverts élémentaires sont les éléments d'une topologie $\mathcal{T}$ sur E. On dit que $\mathcal{T}$ est la topologie produit des $\mathcal{T}_i$. $(E, \mathcal{T})$ est appelé espace topologique produit des $(E_i, \mathcal{T}_i)$.**

Le lecteur démontrera ce théorème en s'inspirant de la définition de la topologie de l'ordre (basée essentiellement sur le fait que $\mathfrak{J}$ est stable par intersection finie). On démontre de la même façon :

Proposition I. — **Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ un point de l'espace produit $(E, \mathcal{T})$. Une partie V de E est voisinage de a si et seulement s'il existe un ouvert élémentaire ω (resp. des voisinages V_i de a_i dans chaque $(E_i, \mathcal{T}_i)$) tel que :**

$$\{a\} \subset \omega \subset V \qquad \left(\textbf{resp. } \{a\} \subset \prod_{i=1}^{n} V_i \subset V\right)$$

Proposition II. — **Soient $(E_i, \mathcal{T}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des espaces topologiques séparés. L'espace topologique produit $(E, \mathcal{T})$ est séparé.**

Soit $(a, b) \in E^2$. Si $a \neq b$, il existe un indice i pour lequel $a_i \neq b_i$. $(E_i, \mathcal{T}_i)$ étant séparé, il existe U et V, voisinages disjoints dans $(E_i, \mathcal{T}_i)$, respectivement de a_i et de b_i.

$E_1 \times ... \times E_{i-1} \times U \times E_{i+1} \times ... \times E_n$ est un voisinage de a,

$E_1 \times ... \times E_{i-1} \times V \times E_{i+1} \times ... \times E_n$ est un voisinage de b, et ils séparent a et b. □

Proposition III. — **Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour que $(E, \mathcal{T})$ soit séparé, il faut et il suffit que l'ensemble $\Delta = \{(x, x) | x \in E\}$, appelé diagonale de E^2, soit fermé dans l'espace topologique produit $E \times E$.**

Les ouverts élémentaires contenant un point forment une base de voisinages de ce point. Il en résulte que Δ est fermé si et seulement si, pour tout

$(a, b) \notin \Delta$, il existe un ouvert élémentaire ω tel que $\{(a, b)\} \subset \omega \subset E^2 \backslash \Delta$. Cela se traduit par l'existence de deux ouverts U et V de $(E, \mathcal{T})$ tels que :

$$(a, b) \in U \times V \qquad \text{et} \qquad (U \times V) \cap \Delta = \emptyset.$$

Autrement dit, Δ est fermé si et seulement si, pour tout (a, b) tel que $a \neq b$, il existe U et V ouverts de E contenant respectivement a et b tels que $U \cap V$ soit vide. C'est la définition de la séparation. □

3° *Topologie usuelle de* $\mathbb{R}^n$. — DÉFINITION. — **On appelle topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ la topologie produit des topologies usuelles de $\mathbb{R}$.**

Convention. — Dans la suite (sauf indication du contraire) $\mathbb{R}^n$ sera toujours muni de la topologie usuelle.

2.1.6. La droite numérique achevée

1° DÉFINITION. — **On appelle droite numérique achevée, et on note $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux nouveaux éléments, distincts, n'appartenant pas à $\mathbb{R}$.**

2° *Relation d'ordre.* — $\overline{\mathbb{R}}$ est totalement ordonné par la relation $\leqslant$ définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \overline{\mathbb{R}}, \ -\infty \leqslant x \text{ et } x \leqslant +\infty. \\ \text{Pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x \leqslant y \text{ est l'ordre dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

On pose : $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, $\overline{\mathbb{R}}_+^* =]0, +\infty]$, $\overline{\mathbb{R}}_- = [-\infty, 0]$,
$\overline{\mathbb{R}}_-^* = [-\infty, 0[$

THÉORÈME I. — **Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.**

Montrons le pour la borne supérieure. Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$.

— Si $+\infty \in A$, alors : $+\infty = \sup A$.

— Si $A = \emptyset$ ou si $A = \{-\infty\}$; alors $-\infty = \sup A$.

— Enfin si $+\infty \notin A$ et $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, nous distinguerons deux cas : ou bien $A \cap \mathbb{R}$ est majorée *dans* $\mathbb{R}$, auquel cas elle admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure, qui est manifestement borne supérieure de A dans $\overline{\mathbb{R}}$; ou bien $A \cap \mathbb{R}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, et alors $+\infty = \sup A$. □

THÉORÈME II. — **Une partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ est un intervalle si et seulement si elle vérifie :**

$$\forall (x, y) \in I^2 \qquad]x, y[\subset I. \tag{1}$$

— La condition est évidemment nécessaire (transitivité de la relation d'ordre).

— Inversement soit $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant (1). Soit $m = \inf I$ et $M = \sup I$. On a : $I \subset [m, M]$. Soit alors $a \in]m, M[$. De $m = \inf I$ et $m < a$ on déduit l'existence de $x \in I$ tel que $x < a$; de même il existe $y \in I$ tel que $a < y$. Or d'après (1) : $]x, y[\subset I$. D'où : $a \in I$. Ainsi :

$$]m, M[\subset I \subset [m, M]$$

I ne peut donc être que l'un des intervalles $]m, M[$, $[m, M[$, $]m, M]$ ou $[m, M]$ (éventuellement vides, d'ailleurs).

Convention. — Nous appellerons désormais *intervalle de* $\mathbb{R}$ tout intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ inclus dans $\mathbb{R}$.

Cela recouvre donc les intervalles de $\mathbb{R}$ au sens propre, les demi-droites (par exemple $]a, \rightarrow[=]a, +\infty[$) et $\mathbb{R}$ lui même ($\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$). Les intervalles au sens propre seront nommés « intervalles bornés » de $\mathbb{R}$.

Le lecteur constatera que (1) caractérise aussi les intervalles de $\mathbb{R}$.

3° ***Opérations.*** — Les opérations sur $\mathbb{R}$ s'étendent *en partie à* $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

a) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

b) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $\quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$

et $\quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty.$

c) *Pour tout* $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$

et $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$

d) *Pour tout* $x \in \overline{\mathbb{R}}_-^*$: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$

et $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$

On notera que la somme de $+\infty$ et $-\infty$ n'est pas définie, ainsi que le produit de 0 par $+\infty$ ou $-\infty$.

N'étant pas partout définies, ces opérations ne confèrent à $\overline{\mathbb{R}}$ aucune des structures algébriques classiques.

4° ***Topologie de*** $\overline{\mathbb{R}}$. — DÉFINITION. — **On appelle topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$ la topologie de l'ordre.**

Convention. — Dans la suite (sauf indication du contraire) $\overline{\mathbb{R}}$ sera toujours muni de la topologie usuelle.

PROPOSITION. — **La topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$ induit sur $\mathbb{R}$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.**

Vérification laissée au lecteur. □

Mais on vérifie facilement que la topologie de l'ordre sur un ensemble totalement ordonné n'induit pas toujours sur toute partie la topologie de

l'ordre induit, ainsi que le montre l'exemple de $\mathbb{R}$ (muni de l'ordre usuel) et de sa partie $\{0\} \cup]1,2]$.

Pratiquement, nous retiendrons comme base de voisinages d'un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$:

— Si $a \in \mathbb{R}$, les intervalles de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$, $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$.

— Si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) les intervalles de la forme $]b, +\infty]$ (resp. $[-\infty, b[$), $(b \in \mathbb{R})$.

C'est justifié par le fait que dans $\overline{\mathbb{R}}$, les demi-droites ouvertes sont les intervalles $]b, +\infty]$ et $[-\infty, b[$.

Remarque. — Il en résulte que $+\infty$ et $-\infty$ sont adhérents à $\mathbb{R}$, donc que $\mathbb{R}$ est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$. La notation $\overline{\mathbb{R}}$ est ainsi justifiée a posteriori.

2.2. LIMITES ET CONTINUITÉ

> *Pour alléger les notations, un espace topologique sera désormais désigné par le même symbole que l'ensemble sous-jacent.*

Préliminaire. — En algèbre (I. 1.2.*3*), nous avons appelé *fonction* de E vers F toute correspondance $f = (\Gamma, E, F)$ dont le graphe est fonctionnel; l'ensemble de définition $\mathrm{pr}_1 \Gamma$ sera désormais désigné par Déf (f). L'application de Déf (f) dans F qui coïncide avec f sur Déf (f) est dite *application canoniquement associée à la fonction f.* Pour $A \subset E$, « f est définie sur A » signifie $A \subset$ Déf (f).

Nous pourrons ainsi étendre aux fonctions la plupart des notions définies pour les applications. Nous utiliserons en particulier les notions d'image directe ou réciproque d'une partie.

Si f est une fonction de E vers F et g une fonction de F vers G, on note $g \circ f$, et on appelle fonction composée, la fonction h de E vers G définie par $h(x) = g[f(x)]$. Son ensemble de définition est Déf $(f) \cap f^{-1}$ [Déf (g)] (éventuellement vide).

2.2.*1*. Limite suivant un ensemble

1° ***Notion de limite.*** — Soient E et F deux espaces topologiques, f une fonction de E vers F dont l'ensemble de définition est noté D (resp. une application f d'une partie D de E dans F), une partie $A \subset D$, un point $a \in \bar{A}$.

Définition. — **On dit que $f(x)$ admet une limite lorsque x tend vers a en appartenant à A si, et seulement s'il existe un élément $l \in F$ vérifiant la condition :**

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists U \in \mathcal{V}(a) \qquad f(U \cap A) \subset V. \tag{1}$$

Notons que, lorsque $a \in D$, l'on ne change rien si on remplace E par D, muni de la topologie induite.

REMARQUE. — Si on n'avait pas $a \in \bar{A}$ le problème serait sans intérêt : il existerait en effet $U_0 \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U_0 \cap A) = \emptyset$ et tout $l \in F$ vérifierait (1).

PROPOSITION I. — **Si F est séparé et s'il existe deux éléments l et l' de F vérifiant l'assertion** (1), **alors** $l = l'$.

Par l'absurde. Supposons que l et l' sont distincts et vérifient (1). Comme F est séparé, on peut trouver $V \in \mathcal{V}(l)$ et $V' \in \mathcal{V}(l')$ disjoints. Par (1), on leur associe $U \in \mathcal{V}(a)$ et $U' \in \mathcal{V}(a)$ tels que $f(U \cap A) \subset V$ et $f(U' \cap A) \subset V'$, ce qui entraîne :

$$f(U \cap U' \cap A) \subset (V \cap V').$$

On a ainsi : $(U \cap U') \cap A = \emptyset$ et $U \cap U' \in \mathcal{V}(a)$, ce qui constitue une contradiction avec $a \in \bar{A}$. □

> *Dans toute la suite nous considérerons — sans que cela soit nécessairement redit — uniquement des applications dont l'espace-image est séparé (condition qui est automatiquement remplie s'il s'agit d'un espace métrique).*

Conséquence de cette convention. — S'il existe $l \in F$ vérifiant (1), la proposition I nous permet de dire que l est **la** limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a en appartenant à A — ou, de préférence, la limite de f au point a suivant A — et d'écrire $l = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$

PROPOSITION II. — **On ne modifie pas l'assertion** (1) **en remplaçant** $\mathcal{V}(a)$ [resp. $\mathcal{V}(l)$] **par une base de voisinages de** a (resp. l).

Soient $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) une base de voisinages de a (resp. l) et

$$\forall V \in \mathcal{B}' \quad \exists U \in \mathcal{B} \qquad f(U \cap A) \subset V. \tag{1'}$$

— Si (1) est vérifiée, soit $V \in \mathcal{B}'$. $V \in \mathcal{V}(l)$ donc il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap A) \subset V$. Il existe alors $U_1 \in \mathcal{B}$ vérifiant $U_1 \subset U$, et a fortiori : $f(U_1 \cap A) \subset V$.

— Si (1′) est vérifiée, soit $V \in \mathcal{V}(l)$. Il existe $V' \in \mathcal{B}'$ vérifiant $V' \subset V$. On lui associe $U \in \mathcal{B}$ tel que $f(U \cap A) \subset V'$. Or $U \in \mathcal{V}(a)$ et $f(U \cap A) \subset V$. □

EXEMPLE. — On peut prendre comme base de voisinages de a les voisinages de a contenus dans $U_0 \in \mathcal{V}(a)$. En pratique cela signifie que l'on peut remplacer A par $A \cap U_0$. (On traduit cette propriété en disant que la limite est une notion locale).

2° *Cas particuliers.* — *a*) Lorsque $a \in A$, la limite éventuelle ne peut être que $f(a)$. En effet, à cause de $a \in U \cap A$, on a nécessairement $f(a) \in V$, et ceci pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$. Il en résulte $f(a) = l$ (F séparé). Cette situation sera étudiée plus en détail sous le nom de continuité.

b) Supposons $A = \text{Déf}(f) \setminus \{a\}$. Cela suppose, si $a \notin \text{Déf}(f)$, que a est adhérent à Déf (f), et si $a \in \text{Déf}(f)$, que a n'est pas un point isolé de Déf(f),

ou encore que a est un point d'accumulation de Déf(f) (traduction de $a \in \overline{\text{Déf}(f)\setminus\{a\}}$ et de la séparation de E).

Convention. — $l = \lim\limits_{x \to a,\, x \in \text{Déf}(f)\setminus\{a\}} f(x)$ s'écrit abréviativement :

$$l = \lim_{x \to a,\, x \neq a} f(x).$$

(Certains auteurs écrivent même dans ce cas, $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$).

c) Dans le cas $E = \mathbb{R}$, on parle de *limite à droite* (resp. *limite à gauche*) lorsque $A = \text{Déf}(f) \cap]a, +\infty[$ (resp. $A = \text{Déf}(f) \cap]-\infty, a[$). On note abréviativement :

$$l = \lim_{x \to a,\, x > a} f(x) \qquad (\text{resp. } l = \lim_{x \to a,\, x < a} f(x))$$

d) En prenant $E = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, muni de la topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}$, $A = \mathbb{N}$, $a = +\infty$, on obtient :

DÉFINITION. — **Soient F un espace topologique séparé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F. On dit que la suite (x_n) admet l'élément l de F pour limite si et seulement si :**

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad x_n \in V.$$

Une suite est dite convergente si elle admet une limite, divergente dans le cas contraire.

On écrit alors abréviativement : $l = \lim (x_n)$.

Ici, $\mathcal{V}(+\infty)$ a été remplacé par la base de voisinages $[N, +\infty]$, $(N \in \mathbb{N})$.

REMARQUE. — Dans $\mathbb{R}$ on retrouve la notion de limite d'une suite qui avait été introduite au chapitre **1**.

2.2.2. Propriétés des limites

Les notations sont celles du **2.2.1**.

1° THÉORÈME. — **Si f admet l pour limite au point a suivant A, alors $l \in \overline{f(A)}$. Plus généralement, si pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$, alors $l \in \overline{B}$.**

— Soit $V \in \mathcal{V}(l)$. Il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que : $f(U \cap A) \subset V$. On a alors : $f(U \cap A) = f(U \cap A) \cap V \subset f(A) \cap V$. $f(U \cap A)$ n'est pas vide car $U \cap A$ ne l'est pas. Donc $f(A) \cap V \neq \emptyset$.

— La deuxième partie résulte simplement de :

$$f(A) \subset B \implies \overline{f(A)} \subset \overline{B}. \qquad \square$$

EXEMPLE. — Si $F = \mathbb{R}$ et si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in A$, alors $l \geqslant 0$. (On prend $B = \mathbb{R}_+$).

2° Supposons $l = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$ et soit $A' \subset A$ avec $a \in \bar{A}'$. On vérifie immédiatement : $l = \lim_{x \to a,\, x \in A'} f(x)$. Il n'en est plus de même si $A \subset A'$. On a cependant le résultat suivant :

THÉORÈME. — **Soient A et A' deux parties de E, a un point adhérent à A et à A', f une fonction de E vers F définie sur $A \cup A'$. Pour que $l = \lim_{x \to a,\, x \in A \cup A'} f(x)$, il faut et il suffit que l'on ait simultanément :**

$$l = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x) \qquad \text{et} \qquad l = \lim_{x \to a,\, x \in A'} f(x).$$

Remarquons que $a \in \bar{A} \cap \bar{A}'$ entraîne $a \in \overline{A \cup A'}$. La condition est nécessaire du fait de $A \subset A \cup A'$ et $A' \subset A \cup A'$. Inversement si $V \in \mathcal{V}(l)$ et si U et U' sont les voisinages de a tels que $f(U \cap A) \subset V$ et $f(U' \cap A') \subset V$, le lecteur vérifiera que $f[(U \cap U') \cap (A \cup A')] \subset V$. Or $U \cap U' \in \mathcal{V}(a)$. □

EXEMPLES. — *a*) Pour qu'une suite (x_n) d'éléments de F admette l pour limite, il faut et il suffit que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) admettent l pour limite. (On prend $A = 2\mathbb{N}$ et $A' = \mathbb{N} \backslash 2\mathbb{N}$)

b) Soit $E = \mathbb{R}$. Pour qu'une fonction numérique f admette une limite l lorsque x tend vers a ($x \neq a$), il faut et il suffit que f admette l comme limite à droite et comme limite à gauche en a. (Ce résultat sous-entend bien sûr que a est adhérent à Déf $(f) \cap]-\infty, a[$ et à Déf $(f) \cap]a, +\infty[$).

3° **Composition des limites.** — THÉORÈME. — **Soient trois espaces topologiques E, F, G, une fonction f de E vers F, et une fonction g de F vers G. Soient A une partie de Déf (f), a un point de E adhérent à A, et B une partie de Déf (g) telle que $f(A) \subset B$; $g \circ f$ est ainsi une fonction de E vers G, définie sur A.**

Dans ces conditions si f admet b pour limite en a suivant A, et si g admet l pour limite en b suivant B, alors $g \circ f$ admet l pour limite en a suivant A.

— Remarquons d'abord que :

$(b = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$ et $f(A) \subset B)$ entraîne $b \in \bar{B}$, (d'après le théorème du 1°).

— Soit alors $W \in \mathcal{V}(l)$. Il existe $V \in \mathcal{V}(b)$ tel que $g(V \cap B) \subset W$. De $V \in \mathcal{V}(b)$ on déduit l'existence de $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap A) \subset V$. Mais $f(A) \subset B$ implique $f(U \cap A) \subset B$. Donc $f(U \cap A) \subset V \cap B$, d'où :

$$(g \circ f)(U \cap A) \subset W$$ □

*CONTRE-EXEMPLE. — Soit $E = F = G = \mathbb{R}$, f définie par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ (Def $(f) = \mathbb{R}^*$), g définie par $g(0) = 1$ et $g(y) = 0$ pour $y \neq 0$.

Prenons $A = \mathbb{R}^*$, $a = 0$, $B = \mathbb{R}^*$, $b = 0$. On a :

$$0 = \lim_{x \to 0,\, x \neq 0} f(x) \qquad \text{et} \qquad 0 = \lim_{y \to 0,\, y \neq 0} g(y).$$

Mais $g \circ f$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 par valeurs différentes de 0.*

REMARQUE. — Le théorème s'applique même si l'on n'a pas $f(A) \subset B$, pourvu qu'il existe $U_0 \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U_0 \cap A) \subset B$ (cf. 2.2.1, 1°, *in fine*).

EXEMPLE. — **Sous-suite.** — DÉFINITION. — **Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'ensemble E. On appelle** *sous suite* **(ou** *suite extraite*) **de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Dans le cas où φ est $n \longmapsto n+k$, (k fixé), on parle de** *suite tronquée*.

Remarquons que : $\lim\limits_{n\to+\infty,\, n\in\mathbb{N}} \varphi(n) = +\infty$, ce qui résulte de : $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n) \geqslant n$ (par récurrence sur n). On en déduit :

THÉORÈME. — **Si une suite d'éléments d'un espace topologique admet une limite l, toute sous suite admet l pour limite.**

La réciproque n'est pas vraie : une suite divergente peut admettre des sous-suites convergentes. Cependant toute suite tronquée d'une suite divergente est divergente.

4° ***Limite d'une fonction à valeurs dans un produit.*** — Ici f est une fonction de l'espace topologique E vers l'espace topologique produit $F = F_1 \times \ldots \times F_q$. On introduit les *projections canoniques* :

$$s_i : F \to F_i \qquad y = (y_1, \ldots, y_q) \longmapsto y_i, \qquad (i \in \mathbb{N}_q)$$

On a visiblement : $$\forall b \in F \quad \lim_{y\to b,\, y\in F} s_i(y) = s_i(b). \qquad (1)$$

THÉORÈME. — **Pour que f admette l pour limite au point a suivant A, ($A \subset \text{Déf}(f)$, $a \in \bar{A}$), il faut et il suffit que, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $s_i \circ f$ admette $s_i(l)$ pour limite au point a suivant A.**

La condition est nécessaire. — Résulte du théorème du 3°, compte tenu de (1).

La condition est suffisante. — Supposons la condition remplie. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$ dans F. On sait qu'il existe des voisinages $V_i \in \mathcal{V}(s_i(l))$ dans F_i, tels que $\{l\} \subset V_1 \times \ldots \times V_q \subset V$. A V_i on peut associer $U_i \in \mathcal{V}(a)$ tel que $s_i \circ f(U_i \cap A) \subset V_i$. En posant $U = \bigcap\limits_{i=1}^{q} U_i$ on constate :

$$U \in \mathcal{V}(a) \quad \text{et} \quad f(U \cap A) \subset V \qquad \square$$

5° *Une propriété des fonctions à valeurs dans* $\mathbb{R}$. — PROPOSITION. — **Soient E un espace topologique, f, g, h trois fonctions de E vers $\mathbb{R}$, A une partie de E incluse dans les ensembles de définition des trois fonctions, et a un point de $\bar{A}$.**
Si pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ et s'il existe $l = \lim\limits_{x\to a,\, x\in A} f(x) = \lim\limits_{x\to a,\, x\in A} g(x)$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $l = \lim\limits_{x\to a,\, x\in A} h(x)$.

Soit V un voisinage de l dans $\overline{\mathbb{R}}$ que l'on peut prendre sous forme d'un *intervalle ouvert* contenant l. De $l = \lim\limits_{x\to a,\, x\in A} f(x)$ (resp $l = \lim\limits_{x\to a,\, x\in A} g(x)$) on déduit l'existence de $U_1 \in \mathcal{V}(a)$ (resp. $U_2 \in \mathcal{V}(a)$) tel que $f(U_1 \cap A) \subset V$ (resp. $g(U_2 \cap A) \subset V$).

$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(a)$ et, pour tout x de $U_1 \cap U_2 \cap A$, on a : $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à V, donc $h(x)$ appartient à V. $\square$

2.2.3. Continuité en un point

1° DÉFINITION. — **Soient E et F deux espaces topologiques, f une fonction de E vers F, D son ensemble de définition. La fonction f est dite continue en un point $a \in D$ si et seulement si :**

$$\forall V \in \mathcal{V}[f(a)] \quad \exists U \in \mathcal{V}(a) \qquad f(U \cap D) \subset V$$

ce qui s'écrit encore : $f(a) = \lim\limits_{x \to a,\, x \in D} f(x)$.

REMARQUES. — *a*) Si a est un point isolé de D, on constate en prenant $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $U \cap D = \{a\}$, que f est continue au point a.

b) Si a n'est pas un point isolé de D, alors $a \in \overline{D \setminus \{a\}}$, et la continuité de f au point a équivaut à :

$$f(a) = \lim_{x \to a,\, x \neq a} f(x).$$

2° ***Propriétés.*** — La continuité en un point étant un cas particulier de la limite suivant un ensemble, tout ce qui a été fait en **2.2.1** s'applique. Nous reprendrons seulement quelques-unes de ces propriétés en raison de leur importance. Les notations sont celles de la définition précédente.

a) *Soit U un voisinage de a. La fonction f est continue au point a si et seulement si la restriction de f à U est continue au point a.*

C'est un cas particulier de **2.2.1**. 1° Proposition II, exemple.

b) *Soient E, F, G des espaces topologiques, f une fonction de E vers F, g une fonction de F vers G. Soient A une partie de* Déf (f) *telle que* $f(A) \subset$ Déf (g), *et $a \in \bar{A}$. Dans ces conditions, si f admet une limite $b \in$* Déf (g) *au point a suivant A, et si g est continue en b, alors $g \circ f$ admet $g(b)$ pour limite en a suivant A.*

C'est un cas particulier du théorème de composition des limites.

c) *Soient E, F, G des espaces topologiques, f (resp. g) une fonction de E vers F (resp. de F vers G). Si f est continue au point a, et g continue au point $f(a)$, $g \circ f$ est continue au point a.*

C'est un cas particulier de b).

d) *Soient E un espace topologique, F un espace topologique produit $F_1 \times \ldots \times F_q$, s_i la projection de F sur F_i. Pour qu'une fonction f de E vers F soit continue au point a, il faut et il suffit que pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $s_i \circ f$ soit continue au point a.*

Résulte de **2.2.2**, 4°.

3° ***Fonctions définies sur un produit.*** — Ici f est une application de l'espace topologique produit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ dans l'espace topologique F. Soit $a = (a_1, \ldots, a_p)$ un point de E. Nous disposons des applications :

$$\varphi_{a,j} : E_j \to F \qquad x_j \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_p), \qquad j \in \mathbb{N}_p,$$

qui sont dites *applications partielles* de f au point a.

Nous avons $\varphi_{a,j} = f \circ \omega_{a,j}$ avec

$$\omega_{a,j} : E_j \to E \qquad x_j \longmapsto (a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_p)$$

On constate que $\omega_{a,j}$ est continue en tout point de E_j (au titre de fonction à valeurs dans un produit, dont les composantes sont continues). Il résulte alors de l'étude de la continuité d'une application composée :

THÉORÈME. — **Si $f : E_1 \times \ldots \times E_p \to F$ est continue au point $a = (a_1, \ldots, a_p)$, alors la j-ième application partielle de f en a est continue au point a_j, $(1 \leqslant j \leqslant p)$.**

REMARQUE. — La réciproque est fausse. Le lecteur s'en assurera en étudiant au point $(0, 0)$ la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{pour} \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

2.2.4. Continuité sur un espace

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient E et F deux espaces topologiques et f une application de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) **f est continue en tout point de E.**

ii) **L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.**

iii) **L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.**

On dit que f est continue sur E si et seulement si elle vérifie ces assertions.

— *i*) $\Longrightarrow$ *ii*). Supposons f continue en tout point de E. Soit V un ouvert de F. Pour tout $a \in f^{-1}(V)$, V est un voisinage de $f(a)$. Il existe donc $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$ (ici Déf $(f) = E$). De $U \subset f^{-1}(V)$, on déduit $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$; $f^{-1}(V)$, voisinage de chacun de ses points, est un ouvert de E.

— *ii*) $\Longrightarrow$ *i*). L'hypothèse est *ii*). Soit $a \in E$. Les voisinages ouverts d'un point constituent une base de voisinages de ce point. Pour tout voisinage ouvert V de $f(a)$, $U = f^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de a, et $f(U) \subset V$. f est donc continue en a.

— *ii*) $\Longleftrightarrow$ *iii*). Vérification immédiate par passage au complémentaire. □

EXEMPLES. — *a*) Soient F un espace topologique, et E un sous-espace de F. L'injection canonique $j : E \to F$ est continue sur E. En effet, pour tout ouvert V de F, $j^{-1}(V) = E \cap V$ est un ouvert de E. □

b) Soient $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ un espace topologique produit, $p_i : E \to E_i$ les projections. Chaque p_i est continue sur E.

Pour tout ouvert V de E_i, $p_i^{-1}(V) = E_1 \times \ldots \times E_{i-1} \times V \times E_{i+1} \times \ldots \times E_n$ est un ouvert élémentaire, donc un ouvert de E. □

On constate, dans ces deux exemples, que la topologie induite (resp. la topologie produit) sur E est la plus petite partie de $\mathcal{T}(E)$ telle que l'injection canonique (resp. chacune des projections p_i) soit continue.

PROPOSITION. — **Soient E et F deux espaces topologiques, f et g deux applications de E dans F. Si f et g sont continues et si F est séparé, l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.**

Il s'agit de l'image réciproque de la diagonale de $F \times F$ qui est un fermé (F séparé) par l'application $x \longmapsto (f(x), g(x))$ qui est continue sur E (**2**.2.*3*, 2° *d*). □

APPLICATION. — *Les hypothèses et les notations étant celles de la proposition, s'il existe une partie dense A de E sur laquelle f et g coïncident, alors $f = g$.*

$\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E contenant A ; c'est donc $\bar{A} = E$. □

EXERCICE. — f est continue si et seulement si, pour toute partie A de F, $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\bar{A})$.

2° ***Homéomorphismes.*** — DÉFINITION. — **Soient E et F des espaces topologiques. On appelle homéomorphisme de E sur F toute bijection continue de E sur F, dont la bijection réciproque est continue sur F. Deux espaces topologiques sont dits homéomorphes si et seulement s'il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre.**

*EXEMPLES. — *a*) Le lecteur vérifiera que $x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1, +1[$, l'homéomorphisme réciproque étant $x \longmapsto \dfrac{x}{1-|x|}$. Il en résulte que $\mathbb{R}$ est homéomorphe à l'intervalle $]-1, +1[$. En utilisant ensuite les homothéties $x \longmapsto ax$ $(a \neq 0)$ et les translations $x \longmapsto a+x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on montre que $\mathbb{R}$ est homéomorphe à tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

b) De même l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$ permet de montrer que $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $]1, +\infty[$, puis à toute demi-droite ouverte de $\mathbb{R}$ (par le procédé ci-dessus).*

PROPOSITION. — **Un homéomorphisme de E sur F transforme un ouvert de E (resp. un fermé de E) en un ouvert de F (resp. un fermé de F).**

En effet l'image par f est l'image réciproque par f^{-1} qui est continue. □

REMARQUE. — Une application bijective de E sur F peut être continue sans que f^{-1} soit continue. (On comparera ce résultat avec les résultats concernant les morphismes bijectifs d'une structure algébrique).

EXEMPLES. — *a*) On prend pour E *l'ensemble* $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète, et pour F *l'espace topologique* $\mathbb{R}$ (topologie usuelle) ; $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est bijective et continue, mais f^{-1} n'est pas continue.

**b*) Soient $E = [0, 2\pi[$ et $F = U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. F est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. L'application $t \longmapsto e^{it}$ de E dans F est continue, bijective, mais f^{-1} n'est pas continue au point $1 \in U$.*

3° ***Composition des fonctions continues.*** — THÉORÈME. — **Soient E, F, G des espaces topologiques, f une application de E dans F, g une application de F dans G. Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.**

Simple conséquence de **2**.3.*3*, 2° *c*).

4° ***Continuité et sous-espaces.*** — THÉORÈME I. — **Soient E et F des espaces topologiques, A un sous-espace de E et $f : E \to F$ une application. Si f est continue sur E, la restriction $f|A$ est continue sur A.**

En notant $j : A \to E$ l'injection canonique (continue) on a : $f|A = f \circ j$. Elle est continue d'après 3°. □

REMARQUE. — Si f est continue *en tout point de A*, $f|A = f \circ j$ est continue sur A (**2.2.**3, 2° *c*). Mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant :

$$E = F = \mathbb{R}; \qquad A = [0, 1];$$

f est la *fonction caractéristique* de A, définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ si $x \notin [0, 1]$. $f|A$ est continue (fonction constante) mais f n'est continue ni en 0 ni en 1.

THÉORÈME II. — **Soient E, F, G des espaces topologiques, F étant un sous-espace de G, et $j : F \to G$ l'injection canonique. Une application $f : E \to F$ est continue si et seulement si $j \circ f : E \to G$ est continue.**

Il suffit de remarquer que les ouverts de F sont de la forme $j^{-1}(U)$, où U est un ouvert de G. □

2.2.5. Complément : bases de filtre

La notion de base de filtre ne sera utilisée qu'aux **5.1.**1, **6.2.**3 et **6.3.**6; *son étude peut être différée.*

1° DÉFINITION. — **On appelle base de filtre sur un ensemble E (qui n'est pas nécessairement un espace topologique) toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les axiomes :**

(B_1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathcal{B}$

(B_2) $\forall (X, Y) \in \mathcal{B}^2 \quad \exists Z \in \mathcal{B} \quad Z \subset X \cap Y$

EXEMPLES. — *a*) Soient E un espace topologique, et a un point de E. Toute base de voisinages de a est une base de filtre.

b) Soient E un espace topologique, A une partie de E et a un point de $\bar{A}$. Les traces sur A des voisinages de a constituent une base de filtre.

c) L'ensemble des parties $[n, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ est une base de filtre, appelée *base de filtre de Frechet*.

2° ***Limite suivant une base de filtre.*** — DÉFINITION. — **Soient E un ensemble F un espace topologique, f une application de E dans F et $\mathcal{B}$ une base de filtre sur E. On dit que f admet un point $l \in F$ pour limite suivant la base de filtre $\mathcal{B}$, et on écrit $l = \lim_{\mathcal{B}} f$, si et seulement si :**

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \qquad \exists B \in \mathcal{B} \qquad f(B) \subset V.$$

EXEMPLES. — En reprenant les exemples du 1°, on retrouvera successivement les notions de continuité en un point, limite suivant un ensemble, limite d'une suite. En particulier, lorsque $\mathcal{B}$ est la base de filtre considérée dans l'exemple *b*) du 1°, $l = \lim_{\mathcal{B}} f$ signifie $l = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$.

3° ***Propriétés.*** — Les limites suivant une base de filtre jouissent de propriétés similaires à celles que nous déjà mises en évidence dans les cas particuliers qui viennent d'être évoqués. Citons, entre autres, l'unicité de la limite lorsque l'espace F est séparé.

2.3. ESPACES MÉTRIQUES

2.3.*1*. Distances

1° DÉFINITION I. — **Soit E un ensemble. On appelle distance sur E toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes :**

$$
\begin{array}{lll}
(D_1) & \forall (x, y) \in E^2 & d(x, y) = 0 \iff x = y \\
(D_2) & \forall (x, y) \in E^2 & d(x, y) = d(y, x) \\
(D_3) & \forall (x, y, z) \in E^3 & d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)
\end{array}
$$

Cette dernière inégalité porte le nom d'*inégalité triangulaire*.

PROPOSITION. — **Si d est une distance sur E :**

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \qquad |d(x, z) - d(z, y)| \leqslant d(x, y). \tag{1}$$

On a, d'après (D_3) :

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \quad \text{et} \quad d(z, y) \leqslant d(z, x) + d(x, y)$$

d'où, en utilisant (D_2) :

$$d(x, z) - d(z, y) \leqslant d(x, y) \quad \text{et} \quad d(z, y) - d(x, z) \leqslant d(x, y)$$

ce qui, par définition de la valeur absolue, équivaut à (1) □

DÉFINITION II. — **On appelle espace métrique tout couple (E, d), où d est une distance sur l'ensemble E.**

2° EXEMPLES. — *a*) Soit E un ensemble quelconque. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$
\begin{array}{lll}
d(x, y) = 0 & \text{si} & x = y \\
d(x, y) = 1 & \text{si} & x \neq y
\end{array}
$$

est une distance sur E.

b) Sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$), $(x, y) \longmapsto |x - y|$ est une distance dite *distance usuelle*.

Convention. — Lorsqu'on parlera de l'espace métrique $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), il s'agira (par abus de langage) de $(\mathbb{R}, d)$ (resp. $(\mathbb{C}, d)$), où d est la distance usuelle.

Plus généralement, si $f : E \to \mathbb{R}$ (resp. $f : E \to \mathbb{C}$) est injective, $(x, y) \longmapsto |f(x) - f(y)|$ est une distance sur E.

c) Soit $E = \mathbb{R}^n$ (resp. $E = \mathbb{C}^n$). Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$, posons :

$$\delta_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\delta_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\delta_\infty(x, y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$$

On vérifie facilement que δ_1 et δ_∞ sont des distances. Pour δ_2, qui n'est autre que la distance euclidienne, on vérifie l'inégalité triangulaire en utilisant l'inégalité de Minkowski du II.1.2.3, 1°.

On dit que δ_1, δ_2 et δ_∞ sont les *distances standard* sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

REMARQUES. — *a*) Pour $n = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_\infty$ (distance usuelle sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$)).

b) Pour $n = 2$, la distance δ_2 sur $\mathbb{R}^2$ n'est autre que la distance usuelle sur $\mathbb{C}$ (en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).

3° ***Boules.*** — DÉFINITION. — **Soient (E, d) un espace métrique, a un point de E, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Les ensembles :**

$$B_0(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$$
$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leqslant r\}$$
$$S(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}$$

sont appelés respectivement boule ouverte, boule fermée, sphère de centre a et de rayon r.

On constate facilement $\{a\} \subset B_0(a, r) \subset B_f(a, r)$. En particulier aucune boule n'est vide. Il n'en est pas de même des sphères.

EXEMPLES. — *a*) Dans $\mathbb{R}$, les boules ouvertes (resp. fermées) sont les intervalles bornés non vides, ouverts (resp. non réduits à un point, fermés).

b) Représentons par une figure les boules de centre O associées aux distances standard dans $\mathbb{R}^2$:

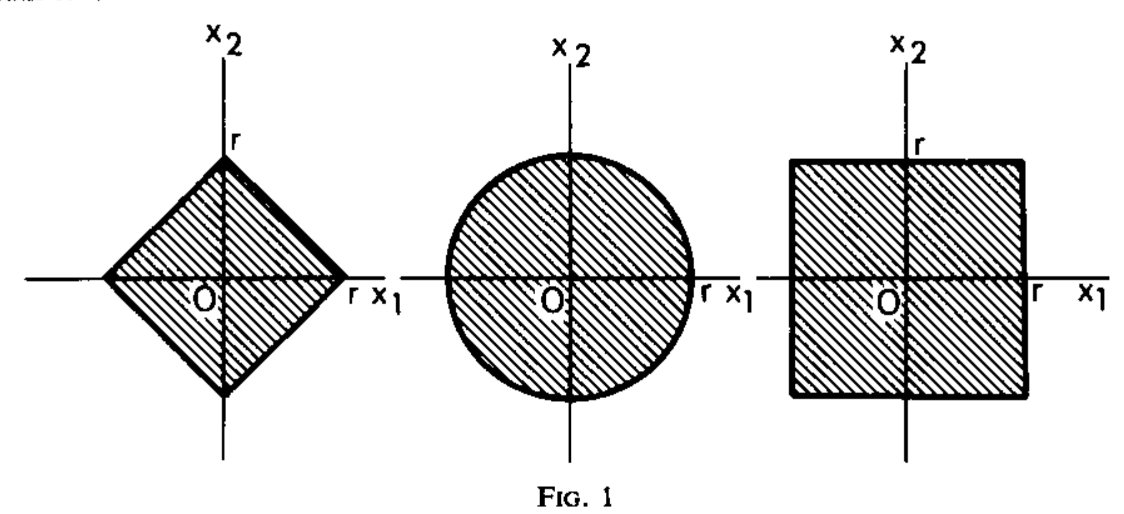


FIG. 1

4° ***Distance à un ensemble, diamètre.*** — DÉFINITION I. — **Soient (E, d) un espace métrique, a un point de E, et A une partie non vide de E. Le réel $\inf_{x \in A} d(x, a)$ est appelé distance de a à A et noté $d(a, A)$.**

EXEMPLE. — Dans $\mathbb{R}$, $d(a, \mathbb{Q}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION II. — **Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. L'élément $\sup_{(x, y) \in A^2} d(x, y)$ de $\overline{\mathbb{R}_+}$ est appelé diamètre de A et noté $\delta(A)$.**

DÉFINITION III. — **Une partie A de l'espace métrique (E, d) est dite bornée si et seulement si elle est vide ou si $\delta(A) < +\infty$.**

PROPOSITION. — **Une partie A d'un espace métrique (E, d) est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule fermée.**

On peut se limiter aux parties non vides.

— Soit A une partie de la boule $B_f(a, r)$. Alors :

$$\forall (x, y) \in A^2 \qquad (d(x, a) \leqslant r) \wedge (d(y, a) \leqslant r)$$

et donc, par l'inégalité trangulaire :

$$\forall (x, y) \in A^2 \qquad d(x, y) \leqslant 2r.$$

A (et, en particulier, $B_f(a, r)$) est donc bornée.

— Inversement soit A une partie bornée de E. Nous pouvons choisir $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\delta(A) \leqslant r$, $b \in E$ et $a \in A$. Considérons la boule fermée $B_f(b, r + d(a, b))$. Pour tout $x \in A$, on a :

$$d(x, b) \leqslant d(x, a) + d(a, b) \leqslant r + d(a, b)$$

D'où :

$$A \subset B_f(b, r + d(a, b)) \qquad \square$$

REMARQUE. — Le centre d'une boule fermée contenant une partie bornée peut être choisi arbitrairement dans E.

DÉFINITION IV. — **Une suite d'éléments de l'espace métrique (E, d) est dite bornée si et seulement si l'ensemble de ses valeurs est une partie bornée de (E, d).**

2.3.2. Topologie induite par une distance

Dans les démonstrations qui suivent, le lecteur débutant est invité à s'aider d'une figure. Cela revient en fait à se placer dans l'espace $(\mathbb{R}^2, \delta_2)$. Il faut cependant prendre garde à ne pas généraliser abusivement des propriétés qui peuvent paraître évidentes sur la figure.

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) **A est réunion de boules ouvertes.**

ii) $\forall a \in A \qquad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \qquad B_0(a, r) \subset A.$

L'ensemble $\mathcal{T}$ des parties A de E vérifiant *i*) et *ii*) est une topologie sur E, dite topologie induite par la distance d (ou associée à d).

i) $\Longrightarrow$ *ii*). Soit $(B_0(a_i, r_i))_{i \in I}$ une famille de boules ouvertes, et A leur réunion. Considérons $a \in A$; il existe $i \in I$ tel que $a \in B_0(a_i, r_i)$; le réel $r_i - d(a, a_i)$ est strictement positif ; désignons le par r. On a :

$$\forall x \in E \qquad d(a_i, x) \leqslant d(a_i, a) + d(a, x)$$

et donc :

$$\forall x \in E \qquad (x \in B_0(a, r)) \Longrightarrow (d(a_i, x) < r_i)$$

Ainsi $\quad B_0(a, r) \subset B_0(a_i, r_i) \subset A.$

ii) $\Longrightarrow$ *i)*. Soit A une partie de E vérifiant *ii)*. A tout $a \in A$, associons un $r_a > 0$ tel que $B_0(a, r_a) \subset A$ (axiome du choix). Par construction :

$$\bigcup_{a \in A} B_0(a, r_a) \subset A.$$

Or tout $a \in A$ vérifie : $a \in B_0(a, r_a)$; on en déduit :

$$A \subset \bigcup_{a \in A} B_0(a, r_a).$$

— Il reste à montrer $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2 \quad A \cap B \in \mathcal{T}$ (les autres vérifications étant immédiates).

Soient $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ et $a \in A \cap B$. Il existe deux réels strictement positifs r et r' tels que : $B_0(a, r) \subset A$ et $B_0(a, r') \subset A$. Posons $r'' = \min\{r, r'\}$. On a $r'' > 0$, et on constate :

$$B_0(a, r'') \subset B_0(a, r) \cap B_0(a, r') \subset A \cap B$$

$A \cap B$ vérifie *ii)*, et donc $A \cap B \in \mathcal{T}$. □

EXEMPLE. — Le lecteur vérifiera que la topologie de $\mathbb{R}$ induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Convention. — Lorsque nous parlerons de la topologie d'un espace métrique (E, d), il s'agira toujours de la topologie induite par d.

2° ***Propriétés.*** — Dans ce qui suit, (E, d) désigne un espace métrique.

a) *Toute boule ouverte est un ouvert* ; *toute boule fermée est un fermé.*

— La première assertion est conséquence de la définition de la topologie de (E, d).

— Soit F la boule fermée $B_f(a, r)$. Considérons $b \in E \backslash F$. Le réel $d(a, b) - r$ est strictement positif ; désignons le par r'. En utilisant :

$$d(a, x) + d(x, b) \geqslant d(a, b),$$

on constate :

$$\forall x \in E \qquad (d(b, x) < r') \Longrightarrow (d(a, x) > r)$$

Ainsi $B_0(b, r') \subset E \backslash F$, et donc $E \backslash F$ est un ouvert. □

b) *L'ensemble des boules ouvertes (resp. fermées) de centre a est une base de voisinages de a. Il en est de même de l'ensemble des boules ouvertes (resp. fermées) de centre a et de rayon* $1/n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Il s'agit de conséquences immédiates des définitions.

APPLICATION : TRADUCTION DE LA CONTINUITÉ. — *Soient* (E, d) *et* (F, δ) *des espaces métriques,* $f : E \to F$ *une application. La définition de la continuité de* f *au point* $a \in E$, donnée au 2.2.3, 1° dans le cas de deux espaces topologiques *est ici équivalente à :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in E \qquad (d(a, x) < \alpha) \Longrightarrow (\delta[f(a), f(x)] < \varepsilon).$$

Le lecteur vérifiera que l'on peut remplacer $d(a, x) < \alpha$ ou $\delta(f(a), f(x)) < \varepsilon$ par des inégalités au sens large.

On dispose, de même, d'une nouvelle définition de la limite en un point, suivant une partie.

c) *Tout espace métrique est séparé.*

Soient a et b deux points distincts de E^2. Posons $\varepsilon = d(a, b)$; on a $\varepsilon > 0$. Les boules ouvertes U et V de centres a et b, de rayon $\varepsilon/2$, qui sont des voisinages de a et b sont disjointes. En effet s'il existait $x \in U \cap V$, de

$$d(a, b) \leqslant d(a, x) + d(x, b) \quad \text{on déduirait} \quad \varepsilon < \varepsilon/2 + \varepsilon/2,$$

ce qui est absurde. □

d) Soient A une partie non vide de E, et a un point de E. Alors $d(a, A) = 0$ équivaut à : $a \in \bar{A}$.

En effet l'assertion : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad d(a, x) < \varepsilon$ équivaut d'une part à

$$\inf_{x \in A} d(a, x) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire à :} \qquad d(a, A) = 0$$

d'autre part à :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad B_0(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing, \qquad \text{c'est-à-dire à :} \qquad a \in \bar{A}$$ □

3° *Isométrie.* — DÉFINITION. — **Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On appelle isométrie de E sur F toute bijection $f : E \rightarrow F$ telle que :**

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \delta\,[f(x), f(y)] = d(x, y).$$

On remarque que f^{-1} est alors une isométrie de F sur E. Comme f est continue (cf. 2° b), et qu'il en est de même pour f^{-1}, on a :

THÉORÈME. — **Toute isométrie est un homéomorphisme.**

Notons, d'autre part, que la composée de deux isométries est une isométrie.

2.3.3. Distances topologiquement équivalentes, distances équivalentes

1° DÉFINITION. — **On dit que deux distances sur un même ensemble E sont topologiquement équivalentes si, et seulement si elles induisent la même topologie sur E.**

L'équivalence topologique est manifestement une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances sur un ensemble donné.

2° ***Caractérisation de deux distances topologiquement équivalentes.*** — THÉORÈME. — **Soient d et d' des distances sur un ensemble E. Notons B_0 (resp B'_0) les boules ouvertes de l'espace (E, d) (resp. (E, d')). Alors d et d'**

sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles vérifient les deux conditions :

$$\forall\, a \in E \quad \forall\, r \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, r' \in \mathbb{R}_+^* \qquad B'_0(a, r') \subset B_0(a, r) \tag{1}$$

$$\forall\, a \in E \quad \forall\, r' \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, r \in \mathbb{R}_+^* \qquad B_0(a, r) \subset B'_0(a, r'). \tag{2}$$

Désignons par $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}'$) la topologie induite par d (resp. d'). On constate que (1) traduit la continuité de l'application $f : x \longmapsto x$ de l'espace topologique $(E, \mathcal{T}')$ dans l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$, en tout point $a \in E$. Il en résulte que (1) équivaut à $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. De même (2) équivaut à $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. □

EXEMPLE. — Le lecteur vérifiera que, d étant une distance sur E, les distances d' et d'', définies par :

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad d'(x, y) = \inf\{1, d(x, y)\}$$

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad d''(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

sont topologiquement équivalentes à d.

Il remarquera que d' et d'' sont *bornées.*

Généralisation. — DÉFINITION. — **On appelle** *pseudo-distance* **sur un ensemble** E, **toute application** $d : E^2 \to \overline{\mathbb{R}_+}$ **vérifiant les axiomes** (D_1), (D_2) **et** (D_3) (définition I du **2.3.***1*, 1°).

On peut définir, comme pour une distance, les boules et la topologie induite par une pseudo-distance d. On démontre, comme dans l'exemple précédent, que cette topologie est aussi induite par les *distances* d' et d'' : $d' = \inf(1, d)$ et $d'' = \dfrac{d}{d+1}$ (en convenant que si $d(x, y) = +\infty$, alors $d''(x, y) = 1$).

3° DÉFINITION. — **Soit** E **un ensemble. On dit que deux distances** d **et** d' **sur** E **sont équivalentes si et seulement s'il existe des réels strictement positifs** k **et** k' **tels que :**

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad d(x, y) \leqslant k\, d'(x, y) \tag{1}$$

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad d'(x, y) \leqslant k'\, d(x, y). \tag{2}$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances.

THÉORÈME. — **Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes.**

On applique le théorème du 2°, en prenant, pour (1), $r' = r/k$ et, pour (2), $r = r'/k'$. □

REMARQUE. — La réciproque est fausse. Soient d la distance usuelle de $\mathbb{R}$, et $d' = \inf(1, d)$. S'il existait un réel k tel que $d \leqslant k d'$, on aurait, pour tout réel $x \geqslant 1$: $d(0, x) \leqslant k\, d'(0, x)$, et donc $x \leqslant k$. □

EXEMPLE. — **Les distances standard sur** $E = \mathbb{R}^n$ (resp. $E = \mathbb{C}^n$) **sont deux à deux équivalentes (donc topologiquement équivalentes).**

Ces distances ont été définies au **2.3.***1*, 2°.

Soit $(x, y) \in E^2$. On a : $\delta_\infty(x, y) = |x_{i_0} - y_{i_0}|$, pour un certain $i_0 \in \mathbb{N}_n$. On en déduit :

$$\delta_\infty(x, y) \leqslant \delta_1(x, y) \qquad \text{et} \qquad \delta_1(x, y) \leqslant n\,\delta_\infty(x, y).$$

De même :

$$\delta_2(x, y) \leqslant \sqrt{n}\,\delta_\infty(x, y) \quad \text{et} \quad \delta_\infty(x, y) \leqslant \delta_2(x, y).$$

Enfin δ_1 et δ_2 sont équivalentes par transitivité. Plus précisément :

$$\delta_1(x, y) \leqslant n\,\delta_2(x, y) \qquad \text{et} \qquad \delta_2(x, y) \leqslant \sqrt{n}\,\delta_1(x, y). \qquad \square$$

4° *Espace métrisable.* — DÉFINITION. — **Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit métrisable si et seulement s'il existe une distance d sur E qui induise la topologie $\mathcal{T}$ sur E.**

Les différentes distances qui correspondent ainsi à $\mathcal{T}$ sont donc topologiquement équivalentes entre elles.

On démontre qu'il existe des espaces topologiques non métrisables. Nous n'en rencontrerons pas dans ce cours (cf. exercice **2**.50).

THÉORÈME. — **L'espace topologique $\overline{\mathbb{R}}$ est métrisable.**

*Soit $I =]-1, +1[$. L'application $g : \mathbb{R} \to I$ définie par $g(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est une bijection continue, dont la bijection réciproque, définie par $g^{-1}(t) = \dfrac{t}{1-|t|}$, est, elle aussi, continue.

C'est un homéomorphisme (n° **2**.2.4, 2°). Soit $\bar{g}$ le prolongement de g défini par $\bar{g}(+\infty) = 1$ et $\bar{g}(-\infty) = -1$. Le lecteur vérifiera qu'il s'agit d'un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$, muni de sa topologie usuelle, sur $J = [-1, +1]$.

Le caractère injectif de $\bar{g}$ permet de montrer facilement que

$$(x, y) \longmapsto |\bar{g}(x) - \bar{g}(y)|$$

est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$, notée δ.

Désignons alors par $\mathcal{T}$ la topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$, par $\mathcal{T}'$ la topologie induite sur $\overline{\mathbb{R}}$ par δ, et par f l'identité de $\overline{\mathbb{R}}$. Posons enfin $\varphi = \bar{g} \circ f$. Pour tout $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$:

$$\delta(x, y) = |\bar{g}(x) - \bar{g}(y)| = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

φ est ainsi une isométrie de $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ sur J. C'est donc un homéomorphisme de $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}')$ sur J. $\bar{g}$ étant lui même un homéomorphisme de $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T})$ sur J, il en résulte que $f = \bar{g}^{-1} \circ \varphi$ est un homéomorphisme de $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}')$ sur $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T})$ et que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.* □

2.3.4. Sous espaces métriques, espaces produits

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient (E, d) un espace métrique et F une partie de E. La restriction à $F \times F$ de d est une distance, notée encore d ; (F, d) est appelé sous-espace métrique de (E, d). La topologie associée à d sur F est la topologie induite sur F par celle de (E, d).**

Les boules du sous-espace F sont les intersections avec F des boules de E. Le reste du théorème s'en déduit. □

REMARQUES. — *a*) Les restrictions à F de deux distances sur E peuvent être équivalentes (resp. topologiquement équivalentes) sans que les distances elles-mêmes le soient.

b) Nous démontrerons ultérieurement que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ n'est pas restriction d'une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$.

2° THÉORÈME. — **Soient $(E_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ une famille finie d'espaces métriques, et $\mathcal{T}_i$ les topologies induites par les d_i. L'espace topologique $(E, \mathcal{T})$, où E est $E_1 \times \ldots \times E_n$ et où $\mathcal{T}$ est la topologie produit des $\mathcal{T}_i$ est métrisable.**

Nous allons définir trois distances sur l'espace produit :

$$\delta_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)\,; \qquad \delta_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2\right)^{1/2}$$

$$\delta_\infty(x, y) = \max_{i=1, \ldots, n} d_i(x_i, y_i)$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$

On montre, comme pour les distances standard sur $\mathbb{R}^n$, que ce sont des distances et qu'elles sont équivalentes. Elles définissent donc toutes les trois la même topologie; montrons qu'il s'agit de la topologie-produit $\mathcal{T}$.

Utilisons pour cela la distance δ_∞. Soit $\mathcal{T}_\infty$ la topologie qui lui est associée. Pour $r > 0$, la boule $B_0(a, r)$ de (E, δ_∞) n'est autre que $\prod_{i=1}^{n} B_{i,0}(a_i, r)$ en notant $B_{i,0}$ les boules ouvertes de l'espace métrique (E_i, d_i) ; c'est un ouvert élémentaire. Tout élément de $\mathcal{T}_\infty$ étant réunion de telles boules, il en résulte $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$.

Inversement soit $A \in \mathcal{T}$. Pour tout $a \in A$, il existe des $A_i \subset E_i$ $(i \in \mathbb{N}_n)$ tels que $A_i \in \mathcal{T}_i$ et $\{a\} \subset \prod_{i=1}^{n} A_i \subset A$. A_i étant un ouvert de E_i, il existe $r_i > 0$ tel que $B_{i,0}(a_i, r_i) \subset A_i$. En considérant $r = \min_{i=1, \ldots, n} r_i$, et en remarquant $r > 0$, on peut écrire :

$$\{a\} \subset \prod_{i=1}^{n} B_{i,0}(a_i, r) \subset \prod_{i=1}^{n} B_{i,0}(a_i, r_i) \subset \prod_{i=1}^{n} A_i \subset A$$

Or $\prod_{i=1}^{n} B_{i,0}(a_i, r)$ n'est autre que $B_0(a, r)$ pour δ_∞. Ce qui montre : $A \in \mathcal{T}_\infty$ □

On dit que δ_1, δ_2 et δ_∞ sont les *distances standard* sur E, associées aux d_i.

REMARQUES. — *a*) Le lecteur notera qu'on ne définit pas d'espace métrique produit. *b*) En prenant $(E_i, d_i) = (\mathbb{R}, d)$ (distance usuelle) on constate que la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ est induite par chacune des distances standard.

2.3.5. Limite et continuité dans un espace métrique

Ce paragraphe a pour but de préciser certaines notions étudiées au sous-chapitre **2.2**, *et en particulier de mettre en évidence le rôle fondamental joué par les suites dans un espace métrique.*

1° ***Limite d'une suite dans un espace métrique.*** — THÉORÈME. — **Pour que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de l'espace métrique (E, d) admette $l \in E$ pour limite, il faut et il suffit que la suite $[d(x_n, l)]_{n \in \mathbb{N}}$ de réels admette 0 pour limite.**

Conséquence immédiate de la définition de la limite d'une suite (**2.2.*1***, 2°) □

2° *Caractérisation des fermés d'un espace métrique.* — Théorème. — **Soit A une partie d'un espace métrique (E, d). Un point $a \in E$ appartient à l'adhérence $\bar{A}$ de A si et seulement s'il est limite d'une suite d'éléments de A.**

— Si $a = \lim x_n$, avec $x_n \in A$ pour tout n, alors $a \in \bar{A}$ d'après **2.2.2**, 1°.

— Inversement, soit $a \in \bar{A}$. Construisons une suite en associant à chaque $n \in \mathbb{N}$ un élément x_n arbitrairement choisi dans $A \cap B_0\left(a, \dfrac{1}{n+1}\right)$ (qui n'est pas vide d'après $a \in \bar{A}$). On a donc : $x_n \in A$ et $d(a, x_n) < 1/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où : $a = \lim x_n$. □

Corollaire. — **Une partie A d'un espace métrique (E, d) en est un fermé si et seulement si toute suite convergente (dans E) d'éléments de A a sa limite dans A.**

On traduit que A est un fermé par $\bar{A} \subset A$. □

3° *Suites et limite de fonction.* — Théorème. — **Soient (E, d) un espace métrique, F un espace topologique, f une fonction de E vers F, A une partie de E contenue dans Déf (f), et $a \in \bar{A}$. Pour que f admette $l \in F$ pour limite en a suivant A il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A, de limite a, la suite $[f(x_n)]_{n \in \mathbb{N}}$ ait pour limite l.**

La condition est nécessaire. En effet $a = \lim x_n$ peut s'écrire

$$a = \lim_{n \to +\infty,\, n \in \mathbb{N}} \varphi(n),$$

où l'on a posé $\varphi(n) = x_n$.

On a alors $f(x_n) = f \circ \varphi(n)$. $x_n \in A$ permet d'écrire $\varphi(\mathbb{N}) \subset A$, et l'on peut alors appliquer le théorème de composition des limites (**2.2.2**, 3°).

La condition est suffisante. Par l'absurde : si f n'admet pas l pour limite en a suivant A[1], on a :

$$\exists\, V \in \mathcal{V}(l) \qquad \forall\, U \in \mathcal{V}(a) \qquad f(U \cap A) \not\subset V.$$

Construisons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en choisissant arbitrairement dans

$$A \cap B_0(a, 1/(n+1))$$

un élément x_n tel que $f(x_n) \notin V$.

Par construction $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A, ayant a pour limite $[d(a, x_n) < 1/(n+1)]$. Or $[f(x_n)]_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut avoir l pour limite en raison de : $f(x_n) \notin V$. □

Corollaire I. — **Avec les mêmes notations, pour que f admette une limite en a suivant A, il faut et il suffit que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A, admettant a pour limite, la suite $[f(x_n)]_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.**

---

[1] Ceci peut se produire de deux façons : f n'a pas de limite, ou bien f a une limite différente de l.

— La condition est évidemment nécessaire.

— Supposant la condition remplie, il s'agit de prouver que si $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathrm{N}}$ sont deux suites d'éléments de A admettant a pour limite, les suites $[f(x_n)]_{n \in \mathrm{N}}$ et $[f(y_n)]_{n \in \mathrm{N}}$ ont même limite. On y parviendra en considérant qu'il s'agit de deux sous-suites de la suite dite « suite mélangée » :

$$f(x_0), f(y_0), f(x_1), f(y_1), \ldots, f(x_n), f(y_n), \ldots$$

laquelle converge puisque la suite x_0, y_0, ..., x_n, y_n, ... admet a pour limite.

COROLLAIRE II. — **Soient (E, d) un espace métrique, F un espace topologique, D une partie de E, $f : D \to F$ une application. Alors f est continue en $a \in D$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ d'éléments de D, admettant a pour limite, $[f(x_n)]_{n \in \mathrm{N}}$ admet $f(a)$ pour limite.**

2.3.6. Valeurs d'adhérence d'une suite

Le lecteur vérifiera que les définitions et théorèmes donnés dans les trois premiers paragraphes s'étendent sans difficultés à des espaces topologiques. Il n'en est pas de même de tous résultats suivants.

1° DÉFINITION. — **Soit $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (E, d). Un élément $a \in E$ est dit valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ si et seulement si :**

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \qquad x_n \in V. \tag{1}$$

Comme dans le cas des limites, on peut remplacer dans cette définition $\mathcal{V}(a)$ par une base de voisinage de a (par exemple, l'ensemble des boules ouvertes de centre a).

THÉORÈME. — **L'assertion (1) est équivalente à :**

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \qquad \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\} \qquad \textbf{est un ensemble infini.} \tag{2}$$

— Supposons (1) fausse. Alors :

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant N \qquad x_n \notin V.$$

Il en résulte $\{n \in \mathbb{N} | x_n \in V\} \subset [0, N[$ et (2) est fausse.

— Supposons (2) fausse. Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\{n \in \mathbb{N} | x_n \in V\}$ est fini. En prenant $N > \operatorname{Max}\{n \in \mathbb{N} | x_n \in V\}$ on aura : $\forall n \geqslant N \; x_n \notin V$, et ainsi (1) est fausse. □

2° ***Ensemble des valeurs d'adhérence.*** — THÉORÈME. — **Soit $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (E, d). Posons $X_n = \{x_k \mid k \geqslant n\}$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est $\bigcap_{n \in \mathrm{N}} \overline{X}_n$. C'est donc un fermé de E.**

L'assertion (1) peut s'écrire successivement :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad V \cap X_N \neq \varnothing$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad V \cap X_n \neq \varnothing)$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \in \overline{X}_n$$
$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X}_n. \qquad \square$$

COROLLAIRE. — **Si une suite d'éléments de (E, d) prend ses valeurs sur une partie A de E, les valeurs d'adhérence de la suite appartiennent à $\overline{A}$.**

Par hypothèse, $X_n \subset A$, donc $\overline{X}_n \subset \overline{A}$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X}_n \subset \overline{A}$. □

REMARQUES. — *a*) Une suite peut ne pas avoir de valeur d'adhérence. C'est le cas pour $(n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ici : $X_n = \{n, n+1, \dots\} = \overline{X}_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X}_n = \varnothing$.

b) Une valeur d'adhérence de (x_n) est adhérente à l'image de la suite, mais la réciproque est fausse.

3° THÉORÈME. — **Soient E et F des espaces métriques, $f : E \to F$ une application continue sur E, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si a est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f(a)$ est valeur d'adhérence de la suite $[f(x_n)]_{n \in \mathbb{N}}$.**

Soit $V \in \mathcal{V}(f(a))$. Il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$. Le théorème résulte alors de : $\{n \in \mathbb{N} | x_n \in U\} \subset \{n \in \mathbb{N} | f(x_n) \in V\}$. □

APPLICATION. — Soient $(E_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ une famille d'espaces métriques, E l'espace produit (muni d'une métrique induisant la topologie produit). Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E et a une valeur d'adhérence de cette suite, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, la projection $s_i(a)$ est valeur d'adhérence de la suite $[s_i(x_n)]_{n \in \mathbb{N}}$.

On se gardera d'énoncer une réciproque : identifions $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, et considérons la suite définie par $z_n = x_n + iy_n = i^n$. 1 est valeur d'adhérence (dans $\mathbb{R}$) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mais $(1, 1)$ n'est pas valeur d'adhérence de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4° *Caractérisation des valeurs d'adhérence.* — Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (E, d).

THÉORÈME. — **Pour que $a \in E$ soit valeur d'adhérence de la suite, il faut et il suffit qu'il existe une sous-suite qui converge vers a.**

— Supposons que $a = \lim x_{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. Soient $V \in \mathcal{V}(a)$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant n_0$, alors $x_{\varphi(n)} \in V$. Posons $n_1 = \max(n_0, N)$ et $n_2 = \varphi(n_1)$, ce qui implique $n_2 \geqslant n_1$. Nous avons $n_2 \geqslant N$ et $x_{n_2} \in V$; a est donc valeur d'adhérence. □

— Inversement soit a une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Construisons par récurrence une sous-suite qui converge vers a.

Choisissons arbitrairement $\varphi(0)$. Supposons $\varphi(n-1)$ connu $(n \geqslant 1)$. D'après (1) on peut trouver un entier, noté $\varphi(n)$, tel que :

$$\varphi(n) > \varphi(n-1) \tag{3}$$

et
$$d(a, x_{\varphi(n)}) < \frac{1}{n} \tag{4}$$

(3) assure la stricte croissance de φ, et (4) la convergence de $x_{\varphi(n)}$ vers a.

COROLLAIRE I. — **Si** $\lim x_n = l$, **alors** l **est unique valeur d'adhérence de la suite.**

En fait ce corollaire vaut dès que E est un espace topologique séparé. Soit alors $l' \neq l$. Il existe $V \in \mathscr{V}(l)$ et $W \in \mathscr{V}(l')$ tels que $V \cap W = \varnothing$. Comme il existe N tel que $x_n \in V$, et donc $x_n \notin W$, dès que $n \geqslant N$, on constate que $\{n \in \mathbb{N} | x_n \in W\}$ est fini ; l' n'est pas valeur d'adhérence. □

COROLLAIRE II. — **Si** a **est valeur d'adhérence d'une sous-suite, alors** a **est valeur d'adhérence de la suite considérée.**

En fait ce corollaire vaut dès que E est un espace topologique. Soit alors a une valeur d'adhérence de la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $V \in \mathscr{V}(a)$ et $N \in \mathbb{N}$ donnés, il existe $p \geqslant N$ tel que $x_{\varphi(p)} \in V$; comme $\varphi(p) \geqslant p$, il en résulte que a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

5° ***Limite supérieure et limite inférieure.*** — Nous allons ici nous intéresser plus spécialement aux suites d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

THÉORÈME ET DÉFINITION I. — **Soit** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **une suite d'éléments de** $\overline{\mathbb{R}}$. **On note** X_n **l'ensemble** $\{x_k \mid k \geqslant n\}$. **La suite définie par** $a_n = \sup X_n$ (**resp.** $b_n = \inf X_n$) **est convergente dans** $\overline{\mathbb{R}}$, **et sa limite est la plus grande (resp. la plus petite) valeur d'adhérence de la suite** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. **On l'appelle limite supérieure (resp. limite inférieure) de la suite** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, **et on la note** $\limsup x_n$ (**resp.** $\liminf x_n$).

— X_n étant une partie de $\overline{\mathbb{R}}$, on connaît l'existence de $a_n = \sup X_n$.

De $X_{n+1} \subset X_n$ on déduit $a_{n+1} \leqslant a_n$.

— La partie $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne inférieure $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Nous allons montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit $V \in \mathcal{V}(L)$, que nous pouvons supposer être un intervalle ouvert contenant L. D'après la définition de L il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$L \leqslant a_{n_0} \quad \text{et} \quad a_{n_0} \in V.$$

D'où, pour tout $n \geqslant n_0$: $L \leqslant a_n \leqslant a_{n_0}$, et donc $a_n \in V$. □

— On a, d'autre part, $\overline{X}_{n+1} \subset \overline{X}_n$. Il en résulte que, pour n donné, la suite $(a_k)_{k \geqslant n}$ est une suite d'éléments de $\overline{X}_n$. Comme L est limite de cette suite, on a $L \in \overline{X}_n$. D'où : $L \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X}_n$ et donc L est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

— Soit maintenant L' une autre valeur d'adhérence de la suite (x_n). On sait que L' est limite d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$. Par définition $x_{\varphi(n)} \in X_{\varphi(n)}$ est donc $x_{\varphi(n)} \leqslant a_{\varphi(n)}$. Par passage à la limite, on obtient $L' \leqslant L$. □

Les propriétés relatives à la limite inférieure se démontrent de la même façon, ou en utilisant : $\limsup(-x_n) = -\liminf(x_n)$.

REMARQUES. — *a*) Toute suite de réels a une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ (cf. espaces compacts).

b) Le lecteur vérifiera que la suite de réels (x_n) est majorée dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si

$$\limsup (x_n) < +\infty.$$

THÉORÈME II. — **La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ converge si et seulement si :**

$$\liminf (x_n) = \limsup (x_n)$$

On a alors : $$\liminf (x_n) = \limsup (x_n) = \lim (x_n).$$

— Si la suite (x_n) converge vers a, a est l'unique valeur d'adhérence de la suite, donc :

$$a = \liminf (x_n) = \limsup (x_n).$$

— Inversement, supposons $a = \liminf (x_n) = \limsup (x_n)$. En conservant les notations de la définition, pour tout intervalle $V \in \mathcal{V}(a)$ on peut trouver N tel que :

$$\forall n \geqslant N \qquad (a_n \in V) \wedge (b_n \in V)$$

ce qui implique $[b_n, a_n] \subset V$, et donc $x_n \in V$. Les voisinages-intervalles constituant une base de voisinages de a, le théorème est démontré. □

• Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les résultats suivants :

THÉORÈME. — **Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.**

i) **Si $x_n \leqslant y_n$ pour tout n, alors :**

$$\limsup (x_n) \leqslant \limsup (y_n) \quad \text{et} \quad \liminf (x_n) \leqslant \liminf (y_n)$$

ii) **Si $x_n + y_n$ est défini pour tout n, alors :**

$$\limsup (x_n+y_n) \leqslant \limsup (x_n) + \limsup (y_n) \text{ et } \limsup (x_n) + \liminf (y_n) \leqslant \limsup (x_n+y_n)$$

lorsque les deux membres sont définis.

iii) **Si $x_n \geqslant 0$ et $y_n \geqslant 0$ pour tout n, alors :**

$$\limsup (x_n y_n) \leqslant (\limsup (x_n))(\limsup (y_n)) \text{ et } (\limsup (x_n))(\liminf (y_n)) \leqslant \limsup (x_n y_n)$$

lorsque les deux membres sont définis.

iv) **Si $x_n \geqslant 0$, alors :**

$$\limsup (1/x_n) = 1/\liminf (x_n)$$

en convenant ici que $1/0 = +\infty$.

• Nous retiendrons plus particulièrement :

COROLLAIRE. — **Si $x_n \geqslant 0$ et $y_n \geqslant 0$ pour tout n, et si $\lim (x_n) = x$, alors :**

$$\limsup (x_n y_n) = x \limsup (y_n).$$

2.3.7. Continuité uniforme

1° Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. La continuité sur E d'une application f de E dans F peut se traduire par :

$$\forall x \in E \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall x' \in E \quad (d(x, x') < \alpha \implies \delta[f(x), f(x')] < \varepsilon).$$

Le nombre α dépend bien entendu de ε, mais aussi de x. Dans certaines questions, il serait commode que α ne dépende pas de x, ce qui conduit à poser :

DÉFINITION. — **Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. Une application f de E dans F est dite uniformément continue si et seulement si :**

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (x, x') \in E^2 \quad (d(x, x') < \alpha \implies \delta[f(x), f(x')] < \varepsilon).$$

REMARQUE. — Comme d'habitude, on peut remplacer $d(x, x') < \alpha$ ou $\delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$ par des inégalités larges.

THÉORÈME I. — **Toute application uniformément continue est continue.**

Vérification immédiate. On notera que la réciproque est fausse. □

Le lecteur démontrera, par simple application de la définition, que $x \longmapsto 1/x$ est une application continue, mais non uniformément continue, de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. (Une démonstration en sera donnée comme application du théorème de prolongement des applications uniformément continues).

THÉORÈME II. — **La composée de deux applications uniformément continues est uniformément continue.**

Vérification immédiate. □

2° *Applications lipschitziennes.* — DÉFINITION. — **Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, k un réel positif. Une application f de E dans F est dite lipschitzienne de rapport k, (ou k-lipschitzienne), si et seulement si :**

$$\forall (x, x') \in E^2 \qquad \delta[f(x), f(x')] \leqslant k\, d(x, x').$$

Lorsque $k < 1$, on parle d'application contractante (ou de contraction).

THÉORÈME. — **Toute application k-lipschitzienne est uniformément continue. La composée d'une application k-lipschitzienne et d'une application k'-lipschitzienne est kk'-lipschitzienne.**

Vérification immédiate. □

EXEMPLES. — *a*) Soit (E, d) un espace métrique. On désigne par (E^2, d_1) l'espace topologique-produit muni de la distance :

$$d_1[(x, y), (x', y')] = d(x, x') + d(y, y').$$

Une simple application de l'inégalité triangulaire montre :

$$|d(x', y') - d(x, y)| \leqslant d_1[(x, y), (x', y')]$$

Il en résulte que $(x, y) \longmapsto d(x, y)$ est une application lipschitzienne de rapport 1 de (E^2, d_1) dans $\mathbb{R}$; d_1 induisant sur E^2 la topologie produit, on a :

THÉORÈME. — **L'application $(x, y) \longmapsto d(x, y)$ de l'espace produit dans $\mathbb{R}$ est continue.**

APPLICATION. — **Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). Les diamètres de A et $\bar{A}$ sont égaux.**

$\delta(A) \leqslant \delta(\bar{A})$ résulte de $A \subset \bar{A}$. Inversement, soit $(a, b) \in (\bar{A})^2$. Il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de A, de limites respectives a et b. D'après le théorème :

$$d(a, b) = \lim d(a_n, b_n)$$

D'où : $d(a, b) \leqslant \delta(A)$, et $\delta(\bar{A}) \leqslant \delta(A)$. □

b) Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. L'application $x \longmapsto d(x, A)$ de (E, d) dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport 1, et donc continue.

Laissé en exercice au lecteur.

3° *Applications à valeurs dans un produit.* —. — THÉORÈME. — **Soient (E, d) un espace métrique, $(F_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ une famille finie d'espaces métriques, F l'ensemble produit $\prod_{i=1}^{n} F_i$. On désigne par s_i les applications projections de F sur F_i, par δ l'une des trois distances standard sur F. Alors une application f de E dans F est uniformément continue si et seulement si chaque $s_i \circ f : E \to F_i$ est uniformément continue.**

Vérification facile (on pourra remarquer que chaque s_i est lipschitzienne de rapport 1). □

2.4. ESPACES COMPLETS

Nous allons généraliser aux espaces métriques la notion de complétude, déjà rencontrée pour les corps valués au chapitre **1**.

2.4.*1*. Suites de Cauchy

Soit (E, d) un espace métrique.

1° DÉFINITION. — **On appelle suite de Cauchy toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E vérifiant :**

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \geqslant N \qquad d(x_n, x_p) < \varepsilon. \tag{1}$$

Il est important de noter que *cette définition est liée à la structure d'espace métrique*; la notion de suite de Cauchy n'a aucun sens dans un espace topologique (voir 2°).

REMARQUES. — *a*) Dans (1), on peut remplacer $d(x_n, x_p) < \varepsilon$ par $d(x_n, x_p) \leqslant \varepsilon$.

b) En utilisant les ensembles $X_n = \{x_k | k \geqslant n\}$, (1) s'écrit simplement :

$$\lim \delta(X_n) = 0.$$

PROPOSITION. — **Toute suite convergente est une suite de Cauchy.**

On suppose qu'il existe $x = \lim x_n$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \qquad d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

Si on prend $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$, alors :

$$d(x_n, x_p) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_p) < \varepsilon.$$ □

2° *Changement de distance.* — THÉORÈME. — **Soient d et δ deux distances équivalentes sur E. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est de Cauchy dans (E, d) si et seulement si elle est de Cauchy dans (E, δ).**

Vérification aisée, laissée au lecteur. □

On notera que ce résultat n'est pas valable pour des distances topologiquement équivalentes, comme le prouve l'exemple suivant :

Sur $\mathbb{R}$, d et δ sont respectivement la distance usuelle et la restriction à $\mathbb{R}$ de la distance définie sur $\overline{\mathbb{R}}$ (2.3.*3*, 4°) ; on sait qu'elles sont topologiquement équivalentes. La suite $n \longmapsto x_n = n$ n'est manifestement pas de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$; elle est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, et donc de Cauchy dans $(\mathbb{R}, \delta)$.

3° ***Propriétés des suites de Cauchy.*** — THÉORÈME I. — **Toute suite de Cauchy est bornée.**

Les notations sont celles du 1°. On a : $\lim \delta(X_n) = 0$, donc $\delta(X_n) < +\infty$ pour une valeur m de n au moins. De $X_0 = \{x_0, \dots, x_{m-1}\} \cup X_m$, on déduit aisément $\delta(X_0) < +\infty$. □

THÉORÈME II. — **Toute valeur d'adhérence d'une suite de Cauchy est limite de la suite.**

Les notations sont encore celles du 1°. Par hypothèse, $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X}_n$. De $\delta(\overline{X}_n) = \delta(X_n)$, (2.3.*7*. 2°), on déduit que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un entier N tel que $\delta(\overline{X}_N) \leqslant \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, $a \in \overline{X}_N$ et $x_n \in \overline{X}_N$ impliquent :

$$d(a, x_n) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

COROLLAIRE. — **Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.**

Résulte de l'unicité de la limite. □

THÉORÈME III. — **Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, f une application uniformément continue de E dans F. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, alors $f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F.**

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Commençons par lui associer $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad (d(x, y) < \alpha \implies \delta[f(x), f(y)] < \varepsilon)$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite de Cauchy, on peut associer à α un $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \qquad \forall p \geqslant N \qquad d(x_n, x_p) < \alpha.$$

Il en résulte :

$$\forall n \geqslant N \qquad \forall p \geqslant N \qquad \delta[f(x_n), f(x_p)] < \varepsilon. \qquad \square$$

REMARQUE. — *La notion de continuité uniforme n'est pas topologique.* Reprenons en effet l'exemple du 2.4.*1*., 2°. $Id_{\mathbb{R}}$ est uniformément continue au titre d'application $(\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d)$, (trivial), mais elle ne l'est pas au titre d'application $(\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, d)$, puisqu'elle transforme alors la suite de Cauchy $n \longmapsto n$ en une suite qui n'est pas de Cauchy. □

2.4.*2*. Espaces complets

1° DÉFINITION. — **Un espace métrique (E, d) est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy de (E, d) est convergente.**

L'assertion (1) du 2.4.*1*, 1° porte alors le nom de « *Critère de Cauchy* ». Son intérêt vient de ce qu'elle caractérise les suites convergentes d'un espace métrique complet, sans faire intervenir la limite.

REMARQUE. — En appliquant le 2.4.*1*, 2°, on constate que la complétude d'un espace métrique est invariante par changement de distance équivalente. En revanche, en conservant les notations de ce 2°, $(\mathbb{R}, d)$ est complet alors que $(\mathbb{R}, \delta)$ ne l'est pas.

2° ***Sous-espaces d'un espace complet.*** — THÉORÈME I. — **Soient (E, d) un espace métrique, et F une partie de E. Si le sous-espace (F, d) est complet, alors F est un fermé de E.**

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge *dans* E. Convergente dans E, la suite est de Cauchy (dans E comme dans F). (F, d) étant complet, elle converge *dans* F. F est alors un fermé de E d'après le corollaire du 2.3.*5*, 2°.

THÉORÈME II. — **Soient (E, d) un espace métrique complet, et F une partie de E. Le sous-espace (F, d) est complet si et seulement si F est un fermé de E.**

— Si (F, d) est complet, F est un fermé (théorème I).

— Supposons que F est un fermé. Toute suite de Cauchy de (F, d) est une suite de Cauchy de (E, d), et donc converge dans E. Mais F étant un fermé, sa limite est dans F; elle converge donc dans (F, d). □

3° ***Espaces produits.*** — THÉORÈME. — **Soit $(E_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}_p}$ une famille finie d'espaces métriques complets. On désigne par E l'ensemble-produit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$. Alors l'espace métrique (E, d) où d est l'une des trois distances standard définies au 2.3.*4*, 2°, est complet.**

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (E, d). En notant s_i l'application projection canonique $E \twoheadrightarrow E_i$,

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall i \in \mathbb{N}_p \qquad d_i[s_i(x), s_i(y)] \leqslant d(x, y).$$

On en déduit facilement que $[s_i(x_n)]_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (E_i, d_i).

Elle est donc convergente pour tout $i \in \mathbb{N}_p$; $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente (2.2.*2*, 4°). □

EXEMPLE. — **$\mathbb{R}^p$, muni de l'une des trois distances standard δ, est complet et si F est un fermé de $\mathbb{R}^p$, alors le sous-espace (F, δ) est complet.**

4° ***Propriété des fermés emboîtés.*** — THÉORÈME. — **Soient (E, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides de E vérifiant :**

i) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_{n+1} \subset F_n$;

ii) $\lim \delta(F_n) = 0$ **(où δ désigne ici le diamètre).**

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est réduit à un point.

Les F_n n'étant pas vides, on peut construire[1] une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n \in F_n.$$

La décroissance de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne, avec les notations habituelles : $X_n \subset F_n$; on en déduit :

$$\delta(X_n) \leqslant \delta(F_n) \qquad \text{et} \qquad \lim \delta(X_n) = 0.$$

La suite est de Cauchy. Désignons par l sa limite. On a : $\{l\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X}_n$. Mais, F_n étant fermé, $\overline{X}_n \subset F_n$ et donc $\{l\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

L'unicité tient à ce que, si x et y sont des éléments de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(x, y) \leqslant \delta(F_n), \qquad \text{et donc} \qquad d(x, y) = 0. \qquad \square$$

REMARQUE. — On notera l'importance de l'hypothèse $\lim \delta(F_n) = 0$. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, les fermés $F_n = [n, +\infty[$ sont « emboîtés », et pourtant $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.

5° ***Critère de Cauchy pour les fonctions.*** — THÉORÈME. — **Soient (E, d) un espace métrique, (F, δ) un espace métrique complet, f une fonction de E vers F, A une partie de Déf (f) et $a \in \overline{A}$. Pour que f admette une limite en a suivant A, il faut et il suffit que :**

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists U \in \mathcal{V}(a) \quad \forall (x, x') \in (U \cap A)^2 \qquad \delta[f(x), f(x')] < \varepsilon. \qquad (1)$$

La condition est nécessaire. — Si $l = \lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)$, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad \exists U \in \mathcal{V}(a) \qquad \forall x \in U \cap A \qquad \delta(f(x), l) < \varepsilon/2.$$

Si $(x, x') \in (U \cap A)^2$: $\quad \delta[f(x), f(x')] \leqslant \delta[f(x), l] + \delta[l, f(x')] < \varepsilon.$

La condition est suffisante. — On suppose (1) vérifiée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A, admettant a pour limite. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, et $U \in \mathcal{V}(a)$ associé à ε par (1). On peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in U$. Il en résulte que, si $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$, alors $(x_n, x_p) \in (U \cap A)^2$, et donc :

$$\delta[f(x_n), f(x_p)] < \varepsilon.$$

La suite $[f(x_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi de Cauchy, et donc elle converge puisque (F, δ) est complet.

Le corollaire I du 2.3.5, 3° permet alors de conclure. $\square$

REMARQUE. — A titre d'exercice, le lecteur pourra étendre le théorème au cas où E est supposé topologique.

6° ***Prolongement des applications uniformément continues.*** — THÉORÈME. — **Soient (E, d) un espace métrique, (F, δ) un espace métrique complet, A une partie dense de E ($\overline{A} = E$). Soit $f : A \to F$ une application uniformément continue. Alors il existe une et une seule application continue $\tilde{f} : E \to F$ prolongeant f. De plus $\tilde{f}$ est uniformément continue.**

— L'unicité résulte de la proposition du 2.2.4, 1°.

— Construisons un prolongement de f : soit $a \in E$ (donc $a \in \overline{A}$). L'uniforme continuité de f nous donne :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (x, x') \in A^2 \quad (d(x, x') < \alpha \Longrightarrow \delta[f(x), f(x')] < \varepsilon) \qquad (2)$$

---

[1] On peut éviter le recours à l'axiome du choix par une récurrence.

Soit U la boule ouverte de centre a et de rayon $\alpha/2$ dans (E, d). En remarquant que, pour $(x, x') \in U^2$, on a $d(x, x') < \alpha$, on constate : $\forall (x, x') \in (A \cap U)^2 \quad \delta[f(x), f(x')] < \varepsilon$.

Le critère de Cauchy pour les fonctions nous montre alors l'existence d'une limite pour f lorsque x tend vers a en appartenant à A. Nous poserons $\tilde{f}(a) = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$.

La continuité de f sur A nous assure : $\tilde{f}|A = f$.

— Vérifions que $\tilde{f}$ est uniformément continue sur E.

Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, et un $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ associé à ε par l'assertion (2). Pour $(x, x') \in E^2$, vérifiant $d(x, x') < \alpha/2$, écrivons $x = \lim x_n$ et $x' = \lim x'_n$, avec $(x_n, x'_n) \in A^2$; Pour n assez grand, $d(x, x_n) < \alpha/4$ et $d(x', x'_n) < \alpha/4$, ce qui entraine $d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x') + d(x', x'_n) < \alpha$. On a alors $\delta[f(x_n), f(x'_n)] < \varepsilon$, et par passage à la limite, en utilisant la continuité de δ :

$$\delta[\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')] \leqslant \varepsilon$$ □

Exemple. — Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. Elle est continue. Mais elle n'est pas uniformément continue car dans ce cas elle serait prolongeable à $[0, 1]$. On aurait $\tilde{f}(0) = \lim_{x \to 0,\, x > 0} 1/x = +\infty$, ce qui contredirait $\tilde{f}(0) \in \mathbb{R}$. □

2.4.3. Théorème du point fixe

1° Le théorème du point fixe est un outil fondamental de l'Analyse. En dehors de ses applications immédiates en analyse numérique (résolution d'équations par la méthode des approximations successives), il possède d'importantes applications théoriques en calcul différentiel (théorème des fonctions implicites, équations différentielles).

— Rappelons que l'on appelle application contractante (ou contraction) toute application k-lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Théorème du point fixe. — **Soient (E, d) un espace métrique complet non vide, et $f : E \to E$ une application k-contractante. L'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule, obtenue comme limite de la suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue en choisissant arbitrairement $x_0 \in E$ et en convenant :**

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n).$$

Unicité. — Soient a et b deux solutions de l'équation. L'inégalité

$$d[f(a), f(b)] \leqslant k\, d(a, b)$$

s'écrit :
$$d(a, b) \leqslant k\, d(a, b).$$

Comme $0 \leqslant k < 1$, cela exige $d(a, b) = 0$, et donc $a = b$.

Existence. — Choisissons arbitrairement $x_0 \in E$ et considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à x_0 par la convention : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n)$.

Pour $n \geqslant 1$: $\qquad d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k\, d(x_n, x_{n-1})$

d'où, par récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n\, d(x_1, x_0).$

Soient n et p deux entiers, avec $p < n$ pour fixer les idées. On a :

$$d(x_n, x_p) \leqslant \sum_{q=0}^{n-p-1} d(x_{p+q}, x_{p+q+1})$$

et donc : $$d(x_n, x_p) \leqslant d(x_1, x_0) \sum_{q=0}^{n-p-1} k^{p+q}.$$

En utilisant la somme des termes d'une progression géométrique, il vient (compte tenu de $0 \leqslant k < 1$) :

$$d(x_n, x_p) \leqslant \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0). \qquad (1)$$

En utilisant $\lim\limits_{p \to +\infty} k^p = 0$, on en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. E étant complet, la suite admet une limite, que nous désignons par a.

Enfin, f étant lipschitzienne, elle est continue. Ainsi $\lim f(x_n) = f(a)$; mais $\lim x_{n+1} = a$; l'unicité de la limite nous donne : $f(a) = a$. □

Remarque. — De (1) on déduit, par passage à la limite, en utilisant la continuité de $z \longmapsto d(z, x_p)$:

$$d(a, x_p) \leqslant \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0)$$

qui fournit un majorant de l'erreur commise en remplaçant a par x_p.

2° ***Complément.*** — Si f est une application de E dans E, on définit les itérées de f par :

$$f^0 = Id_E, \text{ et : } \forall q \in \mathbb{N} \quad f^{q+1} = f \circ f^q$$

Théorème. — **Soient (E, d) un espace métrique complet non vide, et f une application de E dans lui-même, dont une itérée f^q est contractante. Alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule, et cette solution est limite de toute suite de la forme $n \longmapsto f^n(x_0)$, $(x_0 \in E)$.**

— Toute solution de $f(x) = x$ est manifestement solution de $f^q(x) = x$. D'où l'unicité.

— Montrons que la solution a de $f^q(x) = x$ est solution de $f(x) = x$. On a :

$$f^{q+1}(a) = f(f^q(a)) = f^q(f(a)).$$

On en déduit : $f(a) = f^q(f(a))$.

Ce qui montre que $f(a)$ est solution de $f^q(x) = x$. L'unicité donne $f(a) = a$.

— Appliquons le théorème du point fixe à f^q, en partant ici de $f^r(x_0)$, où x_0 est arbitrairement choisi dans E, et où $0 \leqslant r < q$; a est la limite de la suite $(f^{nq+r}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$, et donc la limite de la suite $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ (extension, par récurrence, de l'exemple *a*) du 2.2.2, 2°). □

3° ***Le théorème du point fixe « avec paramètre ».*** — Théorème. — **Soient E un espace métrique complet non vide, Λ un espace topologique, et $f : E \times \Lambda \to E$ une application. On suppose que pour tout $x \in E$, $\lambda \longmapsto f(x, \lambda)$ est une application continue de Λ dans E, et que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda : x \longmapsto f(x, \lambda)$ est une application k-contractante de E dans E, k étant indépendant de λ. En appelant alors a_λ l'unique point fixe de f_λ, l'application $\lambda \longmapsto a_\lambda$ de Λ dans E est continue.**

Montrons la continuité en $\lambda_0 \in \Lambda$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on dispose de $f_\lambda(a_\lambda) = a_\lambda$. On peut alors écrire :

$$d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) = d[f_\lambda(a_\lambda), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})] \leqslant d[f_\lambda(a_\lambda), f_\lambda(a_{\lambda_0})] + d[f_\lambda(a_{\lambda_0}), f_{\lambda_0}(a_{\lambda_0})]$$

f_λ étant contractante de rapport k :

$$d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) \leqslant k\, d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) + d[f(a_{\lambda_0}, \lambda), f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)]$$

ce qui s'écrit :

$$(1-k)\, d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) \leqslant d[f(a_{\lambda_0}, \lambda), f(a_{\lambda_0}, \lambda_0)].$$

Comme $0 < 1-k$, l'assertion résulte alors de la continuité en λ_0 de

$$\lambda \longmapsto f(a_{\lambda_0}, \lambda). \qquad \square$$

Remarque. — Pour $x_0 \in E$ fixé, l'hypothèse sur la continuité de $\lambda \longmapsto f(x_0, \lambda)$ en $\lambda_0 \in \Lambda$ exige, en fait, que l'on suppose que $f : (x, y) \longmapsto f(x, \lambda)$ est continue en (x_0, λ_0), ainsi qu'on le constate en utilisant :

$$d[f(x, \lambda), f(x_0, \lambda_0)] \leqslant kd(x, x_0) + d[f(x_0, \lambda), f(x_0, \lambda_0)].$$

2.5 ESPACES COMPACTS

2.5.*1*. Espaces topologiques compacts

1° Théorème. — **Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :**

i) **De tout recouvrement de E par une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.**

ii) **De toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E, dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.**

Vérification immédiate par passage aux complémentaires. $\square$

Définition. — **Un espace topologique est dit compact si et seulement s'il est séparé, et s'il vérifie l'assertion *i*) qui est dite axiome de** Borel-Lebesgue.

Rappelons que l'hypothèse de séparation est toujours vérifiée pour les espaces métriques.

Exemples. — *a*) Tout espace topologique séparé et *fini* est compact. Un espace discret est compact si et seulement s'il est fini.

b) $\mathbb{R}$ n'est pas compact. Soit $A_n =]-n, +\infty[$. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement par des ouverts ; il n'existe pas de sous-recouvrement fini.

— *Convention.* — Un recouvrement $(A_i)_{i \in I}$ par des ouverts A_i de E est plus simplement appelé « *recouvrement ouvert* ».

2° ***Propriété des fermés emboîtés.*** — Théorème. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace compact et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés non vides. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.**

En effet supposons $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. De *ii*) on déduit l'existence d'une sous-famille finie de (F_n) d'intersection vide. Mais, la suite (F_n) étant décroissante, l'intersection d'une telle sous-famille est égale à l'un des F_n qui n'est pas vide. On aboutit à une contradiction. □

3° ***Partie compacte.*** — DÉFINITION. — **Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, A une partie de E. A est dite partie compacte de $(E, \mathcal{T})$ si et seulement si le sous-espace $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact.**

En utilisant la définition de la topologie induite, on obtient les caractérisations suivantes :

THÉORÈME I. — **Soit A une partie de l'espace topologique séparé $(E, \mathcal{T})$. A est compacte si et seulement si, pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E tels que $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, il existe une sous-famille finie $(A_{i_k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que :**

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}.$$

THÉORÈME II. — **Soit A une partie de l'espace topologique séparé $(E, \mathcal{T})$. A est compacte si et seulement si, pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E tels que $A \cap (\bigcap_{i \in I} F_i) = \emptyset$, il existe une sous-famille finie $(F_{i_k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que :**

$$A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \right) = \emptyset.$$

4° ***Propriétés des parties compactes.*** — THÉORÈME I. — **Toute partie compacte d'un espace topologique séparé $(E, \mathcal{T})$ est fermée.**

Soit A une partie compacte de E. Considérons un point $a \in E \backslash A$. Pour tout $x \in A$, on a : $x \neq a$. On peut donc trouver des voisinages *ouverts* $U_x \in \mathcal{V}(x)$ et $V_x \in \mathcal{V}(a)$, tels que $U_x \cap V_x = \emptyset$. $(U_x)_{x \in A}$ est un recouvrement ouvert de A. Il existe donc $(x_1, ..., x_n) \in A^n$ tel que :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

Posons $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ et $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. On constate : $U \cap V = \emptyset$, et à fortiori $A \cap V = \emptyset$, ce qui s'écrit $V \subset E \backslash A$. Comme $V \in \mathcal{V}(a)$, le théorème en résulte. □

THÉORÈME II. — **Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Une partie de E est compacte si et seulement si elle est fermée.**

— Si $A \subset E$ est compacte, elle est fermée (théorème I).

— Inversement, soit A un fermé de E. Une famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés du sous-espace $(A, \mathcal{T}_A)$ est aussi une famille de fermés de E. La compacité de $(A, \mathcal{T}_A)$ résulte alors de l'assertion *ii*) de la définition. □

5° ***Image continue d'un compact.*** — Théorème. — **Soient E un espace topologique compact, F un espace topologique séparé, et f une application continue de E dans F. Alors $f(E)$ est une partie compacte de F.**

F étant séparé par hypothèse, considérons une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ouverts de F tels que $f(E) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. f étant continue, $f^{-1}(A_i)$ est un ouvert de E. D'autre part $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = E$. On dispose donc d'un recouvrement ouvert de E ; on peut en extraire un sous-recouvrement fini $[f^{-1}(A_i)]_{i \in J}$. De $\bigcup_{i \in J} f^{-1}(A_i) = E$ on déduit $\bigcup_{i \in J} A_i \supset f(E)$. □

Corollaire I. — **Soient E et F des espaces topologiques, F étant séparé. Si f est une application continue de E dans F, l'image par f de toute partie compacte de E est une partie compacte de F.**

*En utilisant le théorème du **2**.5.*3*, 2° nous aurons en outre :

Corollaire II. — **Une fonction numérique ($F = \mathbb{R}$) continue sur un compact non vide est bornée et atteint ses bornes.***

6° ***Application aux homéomorphismes.*** — Théorème. — **Soient E et F des espaces topologiques, E étant compact et F séparé. Toute application f bijective et continue de E dans F est un homéomorphisme.**

Il faut prouver que $g = f^{-1}$ est continue. Pour cela, montrons que $g^{-1}(A)$ est fermé pour tout fermé A de E. En effet un fermé de E est un *compact*, et $g^{-1}(A) = f(A)$ est compact car f est continue. $f(A)$, compact dans l'espace séparé F, est fermé. □

Exemple. — Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. On appelle arc continu dans $(E, \mathcal{T})$ toute application continue f de I dans E, où I est un intervalle (ou une demi-droite) de $\mathbb{R}$ Si I est un compact $[a, b]$, et f injective, on parle d'*arc de Jordan*. Dans ce cas, $f(I)$, appelé *support de l'arc* f, est homéomorphe à I.

2.5.*2*. Espaces métriques compacts

1° Proposition. — **Un espace métrique compact est borné. Une partie compacte d'un espace métrique est bornée.**

Il suffit de recouvrir l'espace, ou la partie, par la famille des boules ouvertes de rayon r donné, et d'en extraire un recouvrement fini. □

2° Théorème fondamental. — **Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement s'il vérifie l'assertion suivante, dite axiome de** Bolzano-Weierstrass :

Toute suite d'éléments de (E, d) admet une valeur d'adhérence (i.e. de toute suite d'éléments de (E, d) on peut extraire une sous-suite convergente).

— *La condition est nécessaire.* — Si l'espace est compact, et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de cet espace, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X}_n$, (avec les notations habituelles (**2**.3.*6*. 2°)). La suite

$(\overline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact. On sait qu'alors : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X}_n \neq \emptyset$ □

REMARQUE. — Cette démonstration reste valable dans un espace topologique quelconque.

— *La condition est suffisante.* — Nous procéderons par étapes.

LEMME I. — *Soit (E, d) un espace métrique dans lequel toute suite admet une valeur d'adhérence. Alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon ε.*

ε étant donné, supposons qu'un tel recouvrement n'existe pas. On peut alors construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, x_0 étant arbitrairement choisi, $x_{n+1} \notin \bigcup_{k=0}^{n} B_0(x_k, \varepsilon)$.

Une telle suite vérifie : $d(x_n, x_p) \geqslant \varepsilon$ dès que $n \neq p$. On ne peut donc en extraire aucune suite de Cauchy; *a fortiori* (x_n) n'a pas de valeur d'adhérence. □

LEMME II. — *Soit (E, d) un espace métrique dans lequel toute suite admet une valeur d'adhérence, et soit $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. Alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in E$, la boule ouverte $B_0(x, \varepsilon)$ est incluse dans l'un des A_i.*

Par l'absurde. Faisons l'hypothèse :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad \exists x \in E \qquad \forall i \in I \qquad B_0(x, \varepsilon) \not\subset A_i \tag{4}$$

En utilisant les valeurs $1/n$ de ε, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall i \in I \qquad B_0(x_n, 1/n) \not\subset A_i. \tag{1}$$

Soit x une valeur d'adhérence de cette suite. Puisque $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de E, il existe $k \in I$ tel que $x \in A_k$. On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_0(x, \alpha) \subset A_k$.

Puisque x est valeur d'adhérence, on peut trouver $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > 2/\alpha$ et $x_m \in B_0\left(x, \frac{\alpha}{2}\right)$. En utilisant $1/m < \alpha/2$ on a : $B_0(x_m, 1/m) \subset B_0(x, \alpha)$ et donc $B_0(x_m, 1/m) \subset A_k$, en contradiction avec (1). □

- Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que la condition est suffisante. Considérons un espace métrique (E, d) dans lequel toute suite admet une valeur d'adhérence. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. Le lemme II fournit un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que toute boule ouverte $B_0(x, \varepsilon)$ soit contenue dans un A_i. L'espace pouvant être recouvert par un nombre fini de ces boules, (lemme I), il le sera *a fortiori* par les A_i correspondants. □

Notons que le théorème fondamental peut s'énoncer : **sur un espace métrique, il y a équivalence entre les axiomes de** BOREL-LEBESGUE **et de** BOLZANO-WEIERSTRASS.

THÉORÈME II. — **Soient (E, d) un espace métrique compact, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E admettant une unique valeur d'adhérence $a \in E$. Alors la suite admet a pour limite.**

Faisons l'hypothèse (H) : a n'est pas limite de la suite. On dispose de $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $m \geqslant N$ tel que $x_m \notin V$. Le lecteur en déduira que l'on peut construire par récurrence une suite extraite de la première, $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{\varphi(n)} \notin V$ pour tout n.

D'après le théorème précédent, cette suite admet une valeur d'adhérence qui, étant valeur d'adhérence de la suite donnée d'après **2**.3.6, 4°, est nécessairement a ; ceci est manifestement une contradiction. (H) est donc absurde. □

REMARQUE. — La démonstration est valable si E est un espace topologique compact.

3° THÉORÈME. — **Tout espace métrique compact est complet.**

En effet, si (E, d) est compact, toute suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, et donc converge (**2**.4.*1*, 3°, théorème II). □

REMARQUE. — L'énoncé de ce théorème est *a priori* surprenant : la compacité est une notion topologique, donc invariante par changement de distances topologiquement équivalentes, ce qui n'est pas le cas général pour la complétude. Il en résulte que *dans le cas des espaces compacts* deux distances topologiquement équivalentes définissent les mêmes suites de Cauchy. Cette situation sera expliquée au 6°.

4° *Espaces produits.* — THÉORÈME. — **Soient (E_i, d_i) $(1 \leqslant i \leqslant p)$ des espaces métriques non vides. L'espace topologique produit E est compact si et seulement si chaque espace topologique E_i est compact.**

— Si E est compact, E_i est compact comme image de E par l'application continue p_i (les projections $p_i : E \to E_i$ sont surjectives car chaque E_i est non vide). □

— Supposons chaque E_i compact. E étant métrisable, nous pouvons appliquer le théorème fondamental du 2° (sans qu'il soit nécessaire d'expliciter la distance choisie sur E).

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. E_1 étant compact, il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $[p_1(x_{\varphi_1(n)})]_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E_1. De même il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $[p_2(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})]_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E_2. Mais notons qu'alors la suite $[p_1(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})]_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E_1, comme sous-suite de la suite convergente $[p_1(x_{\varphi_1(n)})]_{n \in \mathbb{N}}$.

Par récurrence on construira une sous-suite $(x_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que chacune de ses composantes dans E_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ soit convergente. Cette suite est convergente et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence. □

REMARQUE. — On peut démontrer ce théorème dans le cadre des espaces topologiques quelconques.

5° THÉORÈME DE HEINE. — **Toute application continue f d'un espace métrique compact (E, d) dans un espace métrique (F, δ) est uniformément continue.**

$\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ étant donné, la continuité de f permet d'associer à tout $x \in E$ un $\alpha_x \in \mathbb{R}_+^*$ (qui dépend, naturellement, de ε) tel que :

$$\forall y \in E \qquad (d(x, y) < \alpha_x \implies \delta[f(x), f(y)] < \varepsilon/2).$$

Les boules ouvertes $B_0(x, \alpha_x/2)$, que nous désignerons par B_x, constituent un recouvrement ouvert de E. On peut donc trouver des points $x_1, \ldots, x_n$ de E tels que $E = \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}$.

Soit $\alpha = \operatorname{Min}_{i \in \mathbb{N}_n} (\alpha_{x_i}/2)$. Considérons $(x, y) \in E^2$ tel que $d(x, y) < \alpha$.

Il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in B_{x_k}$.

D'après l'inégalité triangulaire :

$$d(x_k, y) \leqslant d(x_k, x) + d(x, y) < \alpha_{x_k}/2 + \alpha \leqslant \alpha_{x_k}$$

On a alors :

$$\delta[f(x), f(y)] \leqslant \delta[f(x), f(x_k)] + \delta[f(x_k), f(y)] < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

6° ***Retour sur les distances équivalentes.*** — Soient d et δ deux distances sur un même ensemble E. Appelons f l'application identique de l'espace métrique (E, d) dans l'espace métrique (E, δ).

On vérifie facilement que d et δ sont topologiquement équivalentes (resp. équivalentes) si et seulement si f est bicontinue (resp. lipschitzienne ainsi que f^{-1}).

On est alors conduit à introduire une notion « intermédiaire » d'équivalence : d et δ seront dites *uniformément équivalentes* si et seulement si f et f^{-1} sont uniformément continues.

On vérifie que la notion de suite de Cauchy, donc d'espace complet, est invariante par changement de distances uniformément équivalentes (2.4.*1*, 3° théorème III).

On remarque aussi que, lorsque (E, d) est compact, toute distance topologiquement équivalente à d lui est uniformément équivalente.

Cette remarque explique a posteriori qu'un espace compact reste complet par changement de distances topologiquement équivalentes.

2.5.*3*. Compacts de $\mathbb{R}$

1° THÉORÈME DE BOREL-LEBESGUE. — **Tout segment $[a, b]$, $a \leqslant b$, de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) est compact.**

— Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'*ouverts* de $\mathbb{R}$ recouvrant $[a, b]$, c'est-à-dire tels que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Nous désignons par E l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que $[a, x]$ est recouvert par un nombre fini de A_i. Il s'agit de montrer : $b \in E$.

— Remarquons d'abord que E n'est pas vide, car $a \in E$ (par hypothèse : $\exists\, i \in I \quad a \in A_i$). Partie non vide et majorée (par b) de $\mathbb{R}$, *E admet une borne supérieure $\beta \in [a, b]$.*

— Il existe $k \in I$ tel que $\beta \in A_k$; comme A_k est ouvert, il existe $\gamma \in]-\infty, \beta[$ tel que $[\gamma, \beta] \subset A_k$. De $\beta = \sup E$ et $\gamma < \beta$, on déduit l'existence de $c \in E$ tel que $\gamma < c \leqslant \beta$. On peut recouvrir $[a, c]$ par un nombre fini d'ouverts A_i ; en leur adjoignant A_k, on constate qu'on peut recouvrir $[a, \beta]$ par un nombre fini de A_i. *On a donc $\beta \in E$.*

— Supposons alors $\beta < b$. En raisonnant comme ci-dessus, on montre qu'il existe $\gamma' \in]\beta, b]$ tel que $[\beta, \gamma'] \subset A_k$. Le recouvrement fini de $[a, \beta]$ mis en évidence ci-dessus est aussi un recouvrement fini de $[a, \gamma']$; on a $\gamma' \in E$, en contradiction avec $\beta = \sup E$. *Finalement* $b \in E$. □

2° THÉORÈME. — **Les parties compactes de $\mathbb{R}$ en sont les fermés bornés.**

— Par *borné* on entend ici *borné pour la relation d'ordre de* $\mathbb{R}$, ou — ce qui revient au même — *borné pour la distance usuelle de* $\mathbb{R}$.

— Dans tout espace métrique, une partie compacte est fermée et bornée (**2**.5.*1*, 4° et **2**.5.*2*, 1°).

— Inversement, soit $A \subset \mathbb{R}$, fermé et borné. De A borné on déduit l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $A \subset [a, b]$. A étant fermé dans $\mathbb{R}$, il est aussi fermé dans $[a, b]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$ d'après le 1°. A est ainsi un compact de $[a, b]$ (**2**,5.*1*, 4°, théorème II), donc un compact de $\mathbb{R}$ (**2**.1.*4*, 3°).

3° THÉORÈME. — **$\overline{\mathbb{R}}$ est compact.**

Toute suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une valeur d'adhérence (sa limite supérieure ou sa limite inférieure). $\overline{\mathbb{R}}$ étant métrisable, c'est un espace compact. □

Notons que l'on peut en déduire le théorème du 1°, car tout segment de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$.

4° ***Compacts de*** $\mathbb{R}^p$. — THÉORÈME. — **Les parties compactes de $\mathbb{R}^p$ sont les parties fermées de $\mathbb{R}^p$ qui sont bornées pour l'une des trois distances standard de $\mathbb{R}^p$.**

On raisonne comme pour $\mathbb{R}$, en remarquant qu'une partie bornée est contenue dans un pavé $\prod_{i=1}^{p} [a_i, b_i]$, et qu'un tel pavé est compact comme produit de compacts.

EXEMPLE. — **Les boules fermées, les sphères sont des compacts de $\mathbb{R}^p$.**

COROLLAIRE. — **De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^p$, on peut extraire une sous-suite convergente.**

REMARQUE. — Les résultats du 4° s'étendent à $\mathbb{C}^p$.

5°* ***Une application : le théorème de d'Alembert.*** — THÉORÈME. — **Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.**

Nous anticipons sur l'étude des opérations sur les limites (**3**.1.*4*, 2°).

— Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, de degré $p \geqslant 1$. Pour $z \neq 0$ écrivons :

$$P(1/z) = a_p z^{-p} \left(1 + \frac{1}{a_p} \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^{p-n}\right).$$

En utilisant : $\lim_{z \to 0} a_n z^{p-n} = 0$ et $\lim_{z \to 0} |a_p z^{-p}| = +\infty$ on constate :

$$\lim_{z \to 0} |P(1/z)| = +\infty.$$

Il existe donc $R \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad (|z| > R) \Longrightarrow (|P(z)| > |P(0)|).$$

L'application $z \longmapsto |P(z)|$ est une application continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{C}$, le disque fermé de centre $0_{\mathbb{C}}$ de rayon R est compact. Ainsi il existe un point z_0 de ce disque tel que $|P(z_0)| = \inf_{|z| \leqslant R} |P(z)|$ (2.5.*1*, 5°).

Comme 0 appartient à ce disque, $|P(z_0)| \leqslant |P(0)|$ est donc :

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| .$$

— Montrons $P(z_0) = 0$. Par translation $z \longmapsto z - z_0$ supposons $z_0 = 0$. Ici $P(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n$ avec $a_p \neq 0$, $p \geqslant 1$ et $|a_0| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.

- Si $a_0 = 0$ le théorème est démontré.
- Supposons $a_0 \neq 0$. On a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad 1 \leqslant \left|1 + \sum_{n=1}^{p} b_n z^n\right| \qquad \left(b_n = \frac{a_n}{a_0}\right).$$

Posons : $n_0 = \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n \neq 0\}$. Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad 1 \leqslant \left|1 + b_{n_0} z^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{p} b_n z^n\right| .$$

Soit ω un élément de $\mathbb{C}$ tel que $\omega^{n_0} = -b_{n_0}$; ω est non nul et en utilisant $z \longmapsto z/\omega$ on obtient, en posant $b_n/\omega^n = c_n$:

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad 1 \leqslant \left|1 - z^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{p} c_n z^n\right| \leqslant |1 - z^{n_0}| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} c_n z^n\right| .$$

En particulier, pour tout réel $x \in]0, 1[$, on a :

$$0 \leqslant -x^{n_0} + \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} c_n x^n\right| , \qquad \text{et donc} \qquad \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} c_n x^{n-n_0}\right| \geqslant 1$$

ce qui est en contradiction avec :

$$\lim_{x \to 0,\, x \in]0,1[} \sum_{n=n_0+1}^{p} c_n x^{n-n_0} = 0.$$ □

2.6. CONNEXITÉ

Nous nous proposons de mathématiser la notion intuitive d'espace topologique « d'un seul tenant ».

2.6.*1*. Espace topologique connexe

1° THÉORÈME ET DÉFINITION I. — **Soit E un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) **Il existe une partie propre de E (autre que E et $\emptyset$), qui est à la fois ouverte et fermée.**

ii) **Il existe une partition de E en deux ouverts.**

iii) **Il existe une partition de E en deux fermés.**

Un espace topologique est dit connexe si et seulement s'il ne vérifie pas ces assertions.

On remarquera que, la définition étant donnée sous forme négative, son usage conduira généralement à un raisonnement par l'absurde.

— L'équivalence de *ii*) et *iii*) est immédiate par passage au complémentaire.

— Si A est une partie propre de E, à la fois ouverte et fermée, $B = E\backslash A$ est une partie propre de E, à la fois fermée et ouverte ; (A, B) est une partition de E en deux ouverts (et aussi en deux fermés).

— Si (A, B) est une partition de E en deux ouverts, A et B sont non vides, distincts de E, ouverts par hypothèse, et fermés au titre de complémentaire d'un ouvert. □

DÉFINITION II. — **On appelle partie connexe d'un espace topologique E toute partie qui, munie de la topologie induite, est un espace connexe.**

Le lecteur est invité à traduire cette définition en n'utilisant que des ouverts (ou des fermés) de E.

EXEMPLE. — $]0, 1[\cup]1, 2[$ est une partie *non connexe* de $\mathbb{R}$. Un singleton est connexe. Nous verrons plus loin des exemples non triviaux d'espaces connexes.

DÉFINITION III. — **On appelle domaine toute partie d'un espace topologique qui est à la fois ouverte et connexe.**

2° ***Caractérisation des espaces connexes.*** — THÉORÈME. — **Un espace topologique E est connexe si et seulement si toute application continue de E dans l'espace discret $D = \{0, 1\}$ est constante.**

— *La condition est nécessaire.* — Supposons E connexe, et $f : E \to D$ continue. $\{0\}$ est ouvert et fermé dans D, donc $f^{-1}(0)$ est ouvert et fermé dans E. On a donc nécessairement $f^{-1}(0) = E$ ou $f^{-1}(0) = \emptyset$. Dans chacun de ces cas, f est constante. □

— *La condition est suffisante.* — Supposons E non connexe. Ecrivons $E = A \cup B$, avec A et B ouverts (et fermés), non vides, et disjoints. Définissons f par $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$. Elle n'est pas constante (A et B sont non vides). Elle est continue (étudier les images réciproques des quatre ouverts de D). □

Cette caractérisation a l'avantage sur la définition de permettre un raisonnement direct.

3° ***Image continue d'un connexe.*** — THÉORÈME. — **Soient E et F des espaces topologiques, $f : E \to F$ une application continue. Si E est connexe, $f(E)$ est une partie connexe de F. Plus généralement si $A \subset E$ est une partie connexe, $f(A)$ est une partie connexe de F.**

On suppose que E est connexe. Soit g l'une quelconque des applications

continues de $f(E)$ dans $D = \{0, 1\}$; $g \circ f : E \to D$ est continue, et donc constante (d'après la connexité de E) ; cela exige que g soit constante. □

4° THÉORÈME. — **Soit A une partie connexe de l'espace topologique E. Alors toute partie B telle que $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe. En particulier $\bar{A}$ est connexe.**

Soit $f : B \to D$, continue. A étant connexe, $f|A$ est constante. A étant dense dans B, f est constante sur B (prolongement par continuité).

REMARQUE. — Inversement, $\bar{A}$ peut être connexe sans que A le soit. * Ainsi dans $\mathbb{R}$, $A =]0, 1[\cup]1, 2[$ n'est pas connexe, alors que $\bar{A} = [0, 2]$ l'est *.

5° THÉORÈME. — **Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E, telle qu'il existe $i_0 \in I$ vérifiant : $\forall i \in I \quad A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Alors $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est une partie connexe de E.**

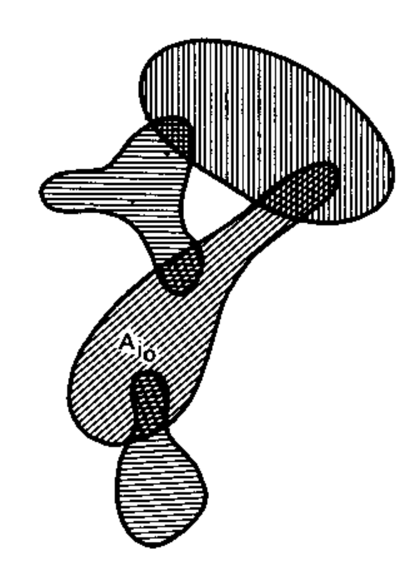


FIG. 2

Soit f une application continue de A dans D (notation du 2°). Chaque restriction $f|A_i$ est continue, donc constante. A cause de $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, $f|A_i$ prend la même valeur que $f|A_{i_0}$. Donc f est constante. □

COROLLAIRE. — **Si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.**

REMARQUE. — Une intersection de parties connexes n'a aucune raison d'être connexe. Le lecteur s'en persuadera par un simple dessin.

6° *Composante connexe.* — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit a un point de E. Il existe une plus grande partie connexe de E dont un point est a. C'est un fermé de E. On l'appelle composante connexe de a dans E.**

La famille $(A_i)_{i \in I}$ des connexes de E dont un point est a n'est pas vide (puisque $\{a\}$ est un connexe de E). D'après le théorème du 5°, sa réunion A est le plus grand connexe de E dont un point est a. En utilisant le théorème du 4° on constate $\bar{A} = A$.

Le lecteur vérifiera que, $C(x)$ désignant la composante connexe de x, « $y \in C(x)$ » est une relation d'équivalence.

7° *Espaces produits.* — THÉORÈME. — **Soient $E_1, \dots, E_p$ des espaces topologiques connexes non vides. Le produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ est connexe si et seulement si chaque E_i est connexe.**

— *La condition est nécessaire.* — Les E_i n'étant pas vides, chaque E_i est l'image de E, espace connexe, par la projection canonique $p_i : E \to E_i$ qui est continue.

— *La condition est suffisante.* — Supposons chaque E_i connexe. Soit f une application continue de E dans $D = \{0, 1\}$.

Chaque application partielle $\varphi_{a,j} : E_j \to D$ (notation du 2.2.*3*, 3°) est continue, donc constante.

Considérons deux points quelconques $(x_1, \dots, x_p) \in E$ et $(y_1, \dots, y_p) \in E$:

On a : $$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = f(y_1, x_2, \dots, x_p)$$

(la première application partielle en $(x_1, \dots, x_p)$ est constante).

De même : $f(y_1, x_2, x_3, \dots, x_p) = f(y_1, y_2, x_3, \dots, x_p)$.

Enfin, par récurrence :

$$f(x_1, \dots, x_p) = f(y_1, \dots, y_p)$$ □

2.6.*2*. Connexes de ℝ

1° THÉORÈME. — **ℝ est connexe.**

— Montrons d'abord qu'*une partie A non vide, ouverte et fermée de* ℝ, *ne peut être minorée* (resp. *majorée*).

En effet, dans le cas contraire, elle aurait une borne inférieure (resp. supérieure) $a \in \mathbb{R}$. De A fermé non vide, on déduirait $a \in A$. De A ouvert, on déduirait alors l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset A$, ce qui est incompatible avec $a = \inf A$ (resp. $a = \sup. A$).

— Supposons maintenant ℝ non connexe. Il existe une partie propre A de ℝ, ouverte et fermée. Choisissons $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Les ensembles $A \cap [x, +\infty[$ et $A \cap]-\infty, x]$ ne peuvent être simultanément vides. Supposons par exemple $A' = A \cap [x, +\infty[$ non vide. Intersection des fermés A et $[x, +\infty[$, A' est un fermé de ℝ ; $x \notin A$ permet de considérer A' comme intersection des ouverts A et $]x, +\infty[$ de ℝ, et donc comme un ouvert de ℝ. Comme A' est minoré, il y a une contradiction avec la remarque préliminaire. □

2° *Parties connexes de* ℝ. — THÉORÈME. — **Les parties connexes de ℝ sont les intervalles de ℝ.**

(Rappelons qu'au 2.1.*6*, 2° nous avons convenu d'appeler intervalle de ℝ tout intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ inclus dans ℝ).

— Un intervalle ouvert de ℝ est soit vide soit homéomorphe à ℝ (2.2.*4*, 2°) ; dans tous les cas il est connexe (2.6.*1*, 3°). Soit maintenant I un intervalle quelconque de ℝ ; si I est vide ou réduit à un point, alors I est

connexe ; sinon posons $J = \mathring{I}$; J est un intervalle ouvert, donc un connexe ; d'autre part $J \subset I \subset \bar{J}$; d'après **2.6.1** 4°, I est connexe.

— Inversement soit I une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle. D'après le théorème II du **2.1.6**, 2°, on peut trouver trois réels a, b, c tels que

$$(a, b) \in I^2, \qquad a < c < b, \qquad c \notin I$$

Posons $A =]-\infty, c[\cap I$ et $B =]c, +\infty[\cap I$. On constate que (A, B) est une partition de I en deux ouverts de I ; il en résulte que I n'est pas connexe. □

3° *Application.* — Théorème des valeurs intermédiaires. — **Soient E un espace topologique connexe, et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue. Si f prend les valeurs α et β, elle prend aussi toutes les valeurs intermédiaires $\gamma \in]\alpha, \beta[$.**

En effet $f(E)$ est un connexe, et donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Si α et β sont deux points de $f(E)$, alors $]\alpha, \beta[\subset f(E)$. □

Remarque. — Tout ce qui précède s'applique aussi à $\overline{\mathbb{R}}$.

2.6.3. Connexité par arcs

1° *Chemins d'un espace topologique.* — Définition. — **Soit E un espace topologique. On appelle chemin toute application continue $\varphi : [\alpha, \beta] \to E$ d'un segment $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ — qu'on pourra le plus souvent supposer être $[0, 1]$ — dans E ; $\varphi([\alpha, \beta])$ est la trajectoire du chemin ; $\varphi(\alpha)$ en est l'origine ; $\varphi(\beta)$ l'extrémité ; on dit que φ « joint les points $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ ».**

Notons que la trajectoire est un connexe de E, au titre de l'image du connexe $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue φ.

2° *Espace connexe par arcs.* — Définition. — **Un espace topologique E est dit connexe par chemins (ou par arcs) si, et seulement si deux quelconques de ses points peuvent être joints par un chemin.**

Théorème. — **Soit E un espace topologique connexe par arcs. Alors E est connexe.**

Soit f une application continue de E dans $D = \{0, 1\}$.

Pour tout $(a, b) \in E^2$, il existe un chemin $\varphi : [0, 1] \to E$ d'extrémités $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.

$f \circ \varphi : [0, 1] \to D$ est continue. Comme $[0, 1]$ est connexe, $f \circ \varphi$ est constante ; on a, en particulier : $(f \circ \varphi)(0) = (f \circ \varphi)(1)$, et donc $f(a) = f(b)$. Il en résulte que f est constante sur E. □

L'exemple suivant montre que la réciproque est fausse :

Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \longmapsto (t, \sin \pi/t)$.

$C = f(]0, 1])$ est l'image par l'application f — visiblement continue — du connexe $]0, 1]$ de

$\mathbb{R}$; c'est donc un connexe de $\mathbb{R}^2$. Son adhérence $\bar{C}$ est également connexe. Le lecteur vérifiera, à titre d'exercice :

— que $\bar{C} \setminus C = \{(0, y) | y \in [-1, +1]\}$

— qu'il n'existe pas de chemin de $\mathbb{R}^2$, d'origine (0, 0) et d'extrémité (1, 0) dont la trajectoire soit incluse dans $\bar{C}$. □

PROPOSITION. — **Soient E un espace topologique et A une partie de E. La trajectoire de tout chemin joignant un point de l'intérieur de A et un point de l'extérieur de A rencontre la frontière de A.**

Si l'image γ d'un tel chemin était contenue dans $E \setminus Fr(A)$, qui est la réunion de l'intérieur et de l'extérieur de A, les intersections de γ avec ces deux parties de E définiraient une partition du connexe γ en deux parties ouvertes, ce qui est impossible. □

EXERCICES

TOPOLOGIE GÉNÉRALE. — *Dans les exercices qui suivent E désigne un espace topologique $(E, \mathcal{T})$.*

2.01. — Montrer que si U et V sont deux ouverts disjoints de E, $\mathring{\bar{U}}$ et $\mathring{\bar{V}}$ sont disjoints.

2.02. — Soient A un ouvert de E, et B une partie quelconque de E. Montrer que $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$. En déduire, toujours en supposant A ouvert :

i) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$;

ii) Si B est dense dans E, $\overline{A \cap B} = \bar{A}$;

iii) Si A et B sont denses dans E, $A \cap B$ est dense dans E.

Donner un exemple, avec A non ouvert, de parties denses dont l'intersection n'est pas dense.

2.03. — Soit A une partie de E. Montrer les inclusions :

$$Fr(\bar{A}) \subset Fr(A) ; \qquad Fr(\mathring{A}) \subset Fr(A) ; \qquad Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$$

Montrer que si $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, alors $Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$.

Si A est ouvert (resp. fermé) l'intérieur de $Fr(A)$ est vide. Ce résultat est-il vrai pour une partie A quelconque ?

Montrer qu'une partie A de E est un ouvert (resp. un fermé) si et seulement si $A \cap Fr(A) = \emptyset$ (resp. $Fr(A) \subset A$) ; A est ouvert et fermé si et seulement si $Fr(A) = \emptyset$.

2.04. — Soient E et F deux espaces topologiques, $A \subset E$, $B \subset F$. Déterminer la frontière de $A \times B$.

2.05. — Soit A une partie de E. Montrer que $A \cup \overset{\circ}{\widehat{(E \setminus A)}}$ et dense dans E.

2.06. — Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.

a) Comparer $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$, $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$, $\overline{\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i}$. Etudier le cas I fini.

b) Comparer $\bigcap_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$, $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i}$.

c) Comparer $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcup_{i \in I} \mathring{A}_i$ et l'intérieur de $\bigcup_{i \in I} A_i$.

d) On suppose card $I \geqslant 2$, chaque A_i dense dans E, et les A_i deux à deux disjoints. Montrer que $\mathring{A}_i = \emptyset$ pour tout $i \in I$.

2.07. — Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Tout singleton est un fermé de E.

b) Pour tout couple de points distincts de E, il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre.

c) Pour tout point $x \in E$, $\{x\}$ est l'intersection de tous les voisinages de x.

2.08. — Soient A et B deux parties de E, U une partie de $A \cap B$. On suppose que U est un ouvert du sous-espace A, et un ouvert du sous-espace B. Montrer que U est un ouvert du sous-espace $A \cup B$. A-t-on la même propriété avec les fermés ?

2.09. — Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. Montrer que la partie A de E est fermée si et seulement si $A \cap U_i$ est un fermé du sous-espace U_i pour tout $i \in I$.

2.10. — Une partie A de E est dite *localement fermée* si et seulement si : pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A$ soit un fermé du voisinage V. Montrer que A est localement fermé si et seulement si $A = U \cap F$, avec U ouvert et F fermé.

2.11. — On munit $\mathbb{R}$ de la topologie suivante : on appelle ouvert toute partie vide ou de complémentaire fini ou dénombrable. Montrer qu'il s'agit d'une topologie, et que, pour cette topologie, toute intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert.

Caractériser les parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles cette topologie induit la topologie discrète.

$\mathbb{R}$ est-il séparé pour cette topologie ?

2.12. — Soit A une partie infinie non dénombrable de $\mathbb{R}$ et A' l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que tout voisinage de x contienne une partie infinie non dénombrable de A. Montrer que A' n'est pas vide et que $A \subset A' \cup D$, D étant au plus dénombrable.

2.13. — Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

2.14. — Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application :

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue ; *ii*) Pour tout $A \subset E$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

iii) Pour tout $B \subset F, f^{-1}(\mathring{B}) \subset \widehat{f^{-1}(B)}^{\circ}$; *iv*) Pour tout $B \subset F, \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.

b) Soit $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. Si les restrictions $f|A_i$ sont continues pour tout $i \in I$, f est continue.

c) Soit $(F_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des fermés. On suppose que pour tout x de E, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ ne rencontrant qu'un nombre fini de F_i. Montrer alors que si les restrictions $f|F_i$ sont continues pour tout $i \in I$, f est continue.

2.15. — Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application continue. Soit Γ le graphe de f, muni de la topologie induite par la topologie produit de $E \times F$. Montrer que E et Γ sont homéomorphes.

2.16. — *a*) Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application continue. Montrer que si A est dense dans E, alors $f(A)$ est dense dans $f(E)$.

b) On admet que $t \longmapsto e^{it}$ est un morphisme continu et surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathrm{U}, \cdot)$, muni de la topologie usuelle. Montrer que tout sous-groupe de $(\mathrm{U}, \cdot)$ est fini ou dense dans U. Montrer que, étant donné $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, l'ensemble $\{e^{in\pi\alpha} | n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans U. (On rappelle : $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$)

Espaces métriques. — *Sauf indication du contraire E désigne un espace métrique* (E, d).

2.17. — Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ strictement croissante, vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u)+\varphi(v)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$.

Montrer que $(x, y) \longmapsto \varphi[d(x, y)]$ est une distance. Exemple : on prend pour E l'ensemble $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, et pour φ :

i) $\varphi(u) = \dfrac{u}{1+u}$ *ii*) $\varphi(u) = \ln(1+u)$ *iii*) $\varphi(u) = u^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

Comparer les distances ainsi obtenues sur $\mathbb{R}$ à la distance usuelle.

2.18. — On dit d'un espace métrique (E, d) qu'il est *ultra-métrique* si et seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \qquad d(x, y) \leqslant \sup [d(x, z), d(z, y)] \tag{1}$$

a) Montrer que si $d(x, z) \neq d(z, y)$, (1) est une égalité. En déduire que dans E tous les « triangles » sont « isocèles ».

b) Montrer que toute boule ouverte (resp. fermée) est un ensemble ouvert et fermé. En désignant par $\mathcal{B}(x, r)$ une boule ouverte ou une boule fermée, montrer :

$$\forall y \in \mathcal{B}(x, r) \qquad \mathcal{B}(x, r) = \mathcal{B}(y, r).$$

c) Montrer que les boules ouvertes de rayon $r > 0$ contenues dans la boule fermée $\mathcal{B}_f(x, r)$ en constituent une partition, les distances mutuelles de deux telles boules ouvertes distinctes étant r.

d) Montrer que dans un espace ultra-métrique, une suite (x_n) est une suite de Cauchy si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

2.19. — *Exemples d'espaces ultra-métriques* (exercice prédécent).

a) Soit $E = K[[X]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans le corps commutatif K (Algèbre I. 7.4.*1*).

On pose $d(S, T) = e^{-\omega(S-T)}$ pour $S \neq T$, et $d(S, S) = 0$, $\omega(S)$ désignant l'ordre de la série formelle S. Montrer que (E, d) est un espace ultra-métrique. Montrer que l'ensemble $F = K[X]$ des polynômes à coefficients dans K est dense dans E. En déduire une justification de l'écriture $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ d'une série formelle.

b) Soient p un nombre premier et $\omega \in]0, 1[$ un réel. Tout rationnel non nul x peut s'écrire $x = p^\alpha \frac{a}{b}$, avec $(\alpha, a, b) \in \mathbb{Z}^3$, a et b étant premiers avec p. L'entier α est ainsi déterminé de manière unique. On pose alors $|x| = \omega^\alpha$, et $|0| = 0$.

i) Montrer que $x \longmapsto |x|$ est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$.

ii) Montrer que $(x, y) \longmapsto |x-y|$ est une distance ultra-métrique sur $\mathbb{Q}$.

2.20. — $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle.

a) L'ensemble $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ est-il fermé?

b) Etudier l'adhérence de l'ensemble $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \,\middle|\, (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

c) Etudier l'adhérence de l'ensemble $\left\{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \,\middle|\, (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

2.21. — L'ensemble $\{\sin(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie dense de $[-1, +1]$.

2.22. — Soit A une partie de E. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$B(A, \alpha) = \{x \in E \mid d(x, A) < \alpha\}.$$

Montrer :

a) $B(A, \alpha) = \bigcup_{x \in A} B_0(x, \alpha)$.

b) $\bar{A} = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} B(A, \alpha)$.

2.23. — Soient A et B deux parties de E, espace métrique, vérifiant

$$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset.$$

Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que : $A \subset U$; $B \subset V$; $U \cap V = \emptyset$.

EXERCICES GÉNÉRAUX

2.24. — Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles non vides; on pose $E = \prod_{n=1}^{+\infty} E_n$. Pour $(x, y) \in E^2$, $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$, on pose $d(x, y) = 1/\inf\{n \in \mathbb{N}^* | x_n \neq y_n\}$ en convenant $1/+\infty = 0$.

a) Montrer que (E, d) est un espace métrique complet. Il est même ultra-métrique (cf. ex. n° **2**.18).

b) Montrer que (E, d) est compact si et seulement si chaque E_n est fini.

c) On dit d'un espace topologique qu'il est localement compact si et seulement si tout point possède un voisinage compact. Montrer que (E, d) est localement compact si et seulement si E_n est fini pour tout n, sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de n.

2.25. — Dans cet exercice, le mot *dénombrable* sera pris au sens *fini ou dénombrable*. On admettra qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$. Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit *à base dénombrable* si et seulement s'il existe une partie dénombrable $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ telle que tout $U \in \mathcal{T}$ soit réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

a) Montrer qu'un espace métrique (E, d) est à base dénombrable si et seulement s'il existe une partie dénombrable de E dense dans E.

En déduire qu'un espace métrique à base dénombrable est équipotent à une partie de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que tout espace métrique compact est à base dénombrable.

c) Plus généralement, montrer qu'un espace métrique est à base dénombrable si et seulement si, de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable.

d) Déterminer une condition pour que l'espace (E, d) de l'exercice précédent soit à base dénombrable.

2.26. — Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que E est compact si et seulement si tout sous-espace discret et infini de E est non fermé dans E.

2.27. — Soit (E, d) un espace métrique, A un compact de E, B un fermé de E tels que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $d(A, B) > 0$.

2.28. — Soit (E, d) un espace métrique, A et B deux compacts de E. Montrer qu'il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $d(a, b) = d(A, B)$. Montrer que cette propriété subsiste, lorsque $E = \mathbb{R}^n$, si l'on suppose A compact et B fermé (on essayera de se ramener au cas où B est compact).

2.29. — Soient (E, d) un espace métrique compact, et $f : E \to E$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad (x \neq y \Longrightarrow d[f(x), f(y)] < d(x, y))$$

Montrer que f admet un unique point fixe. (On pourra considérer $\inf_{x \in E} d[x, f(x)]$).

2.30. — *a*) Soient E et F deux espaces topologiques, E étant compact. Soit A une partie fermée de l'espace-produit $E \times F$. Montrer que la deuxième projection de A est une partie fermée de F.

b) Soient E et F deux espaces topologiques, F étant séparé. Montrer que si $f : E \to F$ est continue, son graphe est fermé dans $E \times F$.

Montrer par un exemple que la réciproque est fausse. Montrer que la réciproque est vraie si on suppose de plus F compact.

2.31. — *a*) Soient E et F deux espaces topologiques, A un compact de E, B un compact de F. Soit W un ouvert de $E \times F$, contenant $A \times B$. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant A, un ouvert V contenant B tels que $A \times B \subset U \times V \subset W$. (On étudiera d'abord le cas $B = \{b\}$.)

b) Retrouver le *a*) de l'exercice précédent, en utilisant le résultat ci-dessus.

c) Soient E et F deux espaces topologiques, E étant compact. Soient A un fermé de $E \times F$, B la deuxième projection de $A (B \subset F)$. Pour tout $y \in B$, on pose :

$$A^{-1}(y) = \{x \in E \mid (x, y) \in A\}.$$

Soient $y_0 \in B$ et V un ouvert de E contenant $A^{-1}(y_0)$. Montrer qu'il existe W, voisinage de y_0 dans F, tel que : $\forall y \in W \quad A^{-1}(y) \subset V$.

2.32. — Soient E espace métrique compact et $f : E \to E$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad d[f(x), f(y)] \geqslant d(x, y).$$

a) Pour $(a, b) \in E^2$, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(a, a_n) \leqslant \varepsilon$ et $d(b, b_n) \leqslant \varepsilon$.

b) En déduire $d(a_1, b_1) = d(a, b)$ et $\overline{f(E)} = E$.

c) Montrer que f est une isométrie de E sur E.

2.33. — Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

« $\mathbb{R}$ est un sous-espace complet de $\overline{\mathbb{R}}$, donc il est fermé. Comme il est dense, $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}}$ ».

2.34. — Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties compactes non vides d'un espace topologique séparé E. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est non vide et que, quel que soit l'ouvert U de E contenant $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, il existe $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N \qquad K_n \subset U$.

2.35. — Soit E un espace métrique, A une partie de E. Pour que $\bar{A}$ soit compacte, il faut et il suffit que toute suite de points de A admette une valeur d'adhérence dans E.

2.36. — Soit E un espace métrique dans lequel toute boule fermée est compacte. Montrer que E est complet.

2.37. — Soient E et F des espaces topologiques séparés, et $f : E \to F$. On suppose :

i) F est compact. *ii*) Pour tout $x \in F, f^{-1}(x)$ est compact. *iii*) Pour tout fermé A de E, $f(A)$ est un fermé de F.

Montrer que E est compact. Donner des exemples où deux hypothèses sont vérifiées, sans que E soit compact.

2.38. — Soit (E, d) un espace métrique complet non vide.

a) Soit $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E. Montrer que $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ est dense dans E.

b) On appelle *ensemble rare* toute partie de E dont l'adhérence est d'intérieur vide. Montrer que E n'est pas réunion dénombrable d'ensembles rares.

c) On suppose $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, A_n étant fermé. Montrer que $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathring{A}_n$ est un ouvert dense dans E.

d) Montrer que dans $\mathbb{R}$, le complémentaire d'une partie dénombrable est dense. (Démonstration élémentaire, ou corollaire de ce qui précède).

2.39. — Soient (E, d) un espace métrique complet, et U un ouvert de E, $U \neq E$. On note F le complémentaire $E \backslash U$. Pour $(x, y) \in U^2$, on pose :

$$\delta(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right| .$$

Montrer que δ est une distance sur U, et qu'elle est topologiquement équivalente à la restriction de d à U. Montrer que (U, δ) est complet.

2.40. — Soient E, F deux espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ une bijection. On suppose f uniformément continue, et f^{-1} continue.

Montrer : (F complet $\Longrightarrow$ E complet). La réciproque est-elle vraie ?

2.41. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose l'existence, pour f, de limites finies lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2.42. — Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que si la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, la suite $(x_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet la même limite. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite l dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet la même limite. Enfin, si $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout n, et si $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $(x_n^{1/n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet la même limite.

2.43. — Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels vérifiant :

i) $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \qquad x_n + x_p \leqslant x_{n+p}$.

ii) $\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{|x_n|}{n} \leqslant M$.

Soit $p \geqslant 1$ fixé et soit e_n la partie entière de $\frac{n}{p}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n x_p \leqslant x_n + M(n - p e_n)$.

b) En déduire que pour toute valeur d'adhérence a de $(x_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a : $x_p/p \leqslant a$. Que peut-on en déduire pour la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

2.44. — Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels vérifiant :

i) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad p_n \geqslant 0$ *ii)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} p_k = +\infty$

a) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k > 0$. On pose alors, pour $n \geqslant n_0$,

$$y_n = \left(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right) \Big/ \sum_{k=0}^{n} p_k.$$

Montrer : $\liminf x_n \leqslant \liminf y_n \leqslant \limsup y_n \leqslant \limsup x_n$.

b) Qu'en déduit-on lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (dans $\overline{\mathbb{R}}$) ?

2.45. — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, admettant 0 pour valeur d'adhérence. Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que :

$$\forall\, p \leqslant n \qquad x_n \leqslant x_p.$$

2.46. — Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels, telles que :

$$\varepsilon_n \geqslant 0, \quad \lim \varepsilon_n = 0 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} - x_n \geqslant -\varepsilon_n.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$.

2.47. — Soit $I = [0, 1]$; posons $E = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$, où $I_n = I$. Pour $x \in E$ et $y \in E$, on pose :

$$d(x, y) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|.$$

Montrer que (E, d) est un espace métrique complet. Peut-on remplacer $I = [0, 1]$ par $I =]0, 1]$?

2.48. — Etudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 > -1; \qquad x_{n+1} = \frac{x_n - \ln(1 + x_n)}{x_n^2}$$

2.49. — Etudier la continuité et la continuité uniforme de $f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{1 - t\sqrt{2}}$

2.50. — Soit E l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans lui-même. Soient $f_0 \in E$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ une famille finie d'éléments de $[0, 1]$. On pose :

$$V(f_0, \varepsilon\,;\, x_1, \ldots, x_n) = \{f \in E \mid \forall\, i \in \mathbb{N}_n \ \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon\}.$$

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des réunions d'ensemble du type $V(f_0, \varepsilon\,; x_1, \ldots, x_n)$ est une topologie sur E, et que $(E, \mathcal{T})$ est séparé.

b) Soit S la partie de E constituée des fonctions de E nulle sauf peut-être en un nombre fini de points. Montrer que S est dense dans E.

c) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S, qui converge dans E. Montrer que l'ensemble des points où $f = \lim f_n$ est non nulle est au plus dénombrable.

d) En déduire que E n'est pas métrisable.

2.51. — Soient a et b deux réels tels que $a/b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Applications. — *i*) Pour tout réel θ tel que $\theta/\pi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $e^{in\theta}$ avec $n \in \mathbb{N}$ est dense dans U, ensemble des nombres complexes de module 1.

ii) Pour tout réel θ tel que $\theta/\pi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, l'ensemble des réels $\sin n\theta$, avec $n \in \mathbb{N}$, est dense dans $[-1, 1]$.

CONNEXITÉ. — *$(E, \mathcal{T})$ désigne un espace topologique.*

2.52. — Montrer que si A et B sont deux parties connexes de E, telles que $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe. Le résultat subsiste-t-il avec $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$?

2.53. — Soit A une partie de E, B une partie connexe telle que $B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap (E\backslash A) \neq \emptyset$. Montrer qu'alors $B \cap \mathrm{Fr}\,(A) \neq \emptyset$.

2.54. — L'espace $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^2$ est-il connexe ?

2.55. — Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. Montrer que $[0, 1]$ et $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ne sont pas homéomorphes.

2.56. — Soit (E, d) métrique connexe. On suppose d non bornée. Montrer que toute sphère est non vide.

2.57. — Donner un exemple, dans $\mathbb{R}^2$, d'une suite décroissante de connexes dont l'intersection est non connexe. Montrer que si E est compact, toute suite décroissante de fermés connexes a une intersection connexe.

2.58. – Soit (E, d) un espace métrique compact tel que, pour toute boule ouverte $B_0(a, r)$, son adhérence soit la boule fermée $B_f(a, r)$. Montrer que toute boule de E est connexe.

2.59. — Soient E un espace métrique compact, non vide, a un point de E, C la composante connexe de a (2.6.*1*, 6°), $(A_i)_{i \in I}$ la famille des parties à la fois ouvertes et fermées de E dont un point est a. On pose $B = \bigcap_i A_i$. Montrer : $C = B$.

3
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

> *Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des réels, soit le corps des complexes ; ce corps est muni de la topologie usuelle.*

3.1.*1*. Espaces vectoriels normés

1° *Normes.* — DÉFINITION. — **Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. On appelle norme sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants :**

i) $\forall\, x \in E \qquad (N(x) = 0 \implies x = 0_E)$

ii) $\forall\, x \in E \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \qquad N(\alpha x) = |\alpha|\, N(x)$

iii) $\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Notons que $N(0_E) = 0$ (en prenant $\alpha = 0$ dans *ii*). Le lecteur vérifiera aisément :

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$$

qui, en changeant y en $-y$, donne :

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad |N(x) - N(y)| \leqslant N(x+y).$$

EXEMPLES. — *a*) $\mathbb{K}$ étant considéré comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x \longmapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$.

b) Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ (ou sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$) on peut définir les trois normes suivantes, qui sont dites *normes standard* sur $\mathbb{K}^n$.

$$\nu_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \qquad \nu_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\nu_\infty(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}_n} |x_i|, \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n)).$$

Pour la vérification de *iii*), dans le cas ν_2, on utilise l'inégalité de Minkowski (II.1.2.*3*, 1°).

Notons que ν_1 et ν_2 sont des cas particuliers de la norme :

$$\nu_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad (p \text{ réel} \geqslant 1)$$

qui sera introduite au **4**.5.*1*, 5°.

* *c*) Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{K}$, on dispose des normes :

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt\,; \qquad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|. {}_*$$

Généralisation. — On appelle *semi-norme* sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes *ii*) et *iii*). * Ainsi dans l'exemple *c*) ci-dessus, si on remplace E par l'espace vectoriel des applications intégrables sur $[0, 1]$, N_1 et N_2 sont des semi-normes. ${}_*$

2° ***Espaces vectoriels normés.*** — DÉFINITION. — **On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (en abrégé : e.v.n.) tout couple (E, N) où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N une norme sur E.**

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on adopte la notation : $N(x) = \|x\|$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, il est clair que la restriction $N|_F$ est une norme sur F. $(F, N|_F)$ est alors appelé *sous-espace vectoriel normé* de l'e.v.n. (E, N).

3° ***Distance induite par une norme.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. L'application $(x, y) \longmapsto \|x-y\|$ est une distance sur E, appelée distance induite par la norme. La topologie induite par cette distance est dite topologie de la norme.**

Vérification immédiate.

Dans la pratique, par abus de notation, nous utiliserons en général la même lettre E pour désigner l'ensemble sous-jacent, l'espace vectoriel, l'e.v.n., l'espace métrique et l'espace topologique.

PROPRIÉTÉS. — a) *La distance est invariante par translation.*

Soit d la distance induite par la norme. On vérifie :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \qquad d(x+z, y+z) = d(x, y).$$

Ainsi toute boule de E se déduit par une translation de la boule de même nature, de même rayon, et de centre 0_E.

b) *L'ensemble des boules de nature donnée, de centre 0_E, est invariant par homothétie (de rapport non nul).*

Ces deux propriétés nous conduiront souvent à nous ramener à des boules de rayon 1 et de centre 0_E.

La boule $B_o(0_E, 1)$ est dite *boule unité ouverte*. La boule $B_f(0_E, 1)$ est dite *boule unité fermée*. La sphère $S(0_E, 1)$ est dite *sphère unité*. Elle n'est pas vide dès que $E \neq \{0_E\}$, car elle contient alors $x/\|x\|$ pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$.

c) *L'application $x \longmapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport 1, donc continue.*

En effet, pour tout $(x, y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$. □

4° ***Espaces de Banach.*** — DÉFINITION. — **On appelle espace de Banach tout e.v.n. dont l'espace métrique associé est complet (abréviativement : tout e.v.n. complet).**

EXEMPLE. — $\mathbb{K}^n$ est un espace de Banach, pour chacune des trois normes standard.

5° ***Espaces produits.*** — Soit $(E_i, N_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ une famille d'e.v.n. sur le même corps $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel produit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ peut être muni de la

topologie produit des topologies des E_i. On sait déjà qu'il s'agit d'une topologie d'espace métrisable. On constate que les trois distances standard définies au **2**.3.*4*, 2° proviennent en fait des trois normes suivantes :

$$\nu_1(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x) ; \qquad \nu_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} [N_i(x)]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\nu_\infty(x) = \max_{i \in \mathbf{N}_n} N_i(x).$$

qui sont dites *normes standard associées aux* N_i.

Lorsque nous parlerons d'espace normé produit, il s'agira de E, muni de l'une de ces trois normes, qui définissent trois distances équivalentes.

En utilisant **2**.4.*2*, 3°, on constate que si les E_i sont des espaces de Banach, il en est de même de E.

6° *Parties convexes d'un e.v.n.* — *a*) DÉFINITION I. — **Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, x et y des points de E. On appelle segment de E d'extrémités x et y l'ensemble**

$$[x, y] = \{z \in E \mid \exists\, t \in [0, 1] \quad z = tx + (1-t)y\}.$$

Dans le cas d'un e.v.n., il s'agit de la trajectoire d'un chemin.

DÉFINITION II. — **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute réunion finie $\bigcup_{i \in \mathbf{N}_n} [x_i, y_i]$ de segments tels que $y_i = x_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbf{N}_{n-1}$ est dite ligne polygonale.**

DÉFINITION III. — **Une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite convexe si et seulement si, pour tout $(x, y) \in A^2$, le segment de E d'extrémités x et y est contenu dans A.**

DÉFINITION IV. — **Soient A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et a un point de A. On dit que A est étoilée relativement à a si, et seulement si, pour tout $x \in A$, le segment de E d'extrémités x et a est contenu dans A.**

Ces définitions s'étendent aux espaces affines.

b) THÉORÈME I. — **Toute boule $\mathcal{B}$, ouverte ou fermée, d'un e.v.n. est convexe.**

Montrons le dans le cas : $\mathcal{B} = B_o(a, r)$. Soient $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ et $t \in [0, 1]$. Alors $\|tx + (1-t)y - a\|$, qui s'écrit $\|t(x-a) + (1-t)(y-a)\|$, est majoré par $t\,\|x-a\| + (1-t)\,\|y-a\|$, et donc strictement majoré par r. □

THÉORÈME II. — **Toute partie convexe non vide A d'un e.v.n. E est une partie connexe par arcs (et donc connexe) de E.**

Soit $(x, y) \in A^2$. Associons lui l'application :

$$\varphi : [0, 1] \to E \qquad t \longmapsto tx + (1-t)y.$$

Pour tout $(t', t'') \in ([0, 1])^2$, on a : $\varphi(t') - \varphi(t'') = (t' - t'')(x-y)$ et :

$$\|\varphi(t') - \varphi(t'')\| \leqslant |t' - t''|\, \|x-y\|$$

φ est donc continue. On a $[x, y] = \varphi([0, 1])$. Or, d'après la convexité de A, $[x, y]$ est inclus dans A. □

THÉORÈME III. — **Soit A une partie non vide d'un e.v.n. E, à la fois ouverte et connexe (on a dit que A est un domaine de E). Alors A est connexe par arcs ; on peut même joindre deux points quelconques de A par une ligne polygonale de E, incluse dans A.**

Fixons $a \in A$ et étudions l'ensemble $A' \subset A$ constitué par les points de A qui peuvent être joints à a par une ligne polygonale incluse dans A.

— *A' n'est pas vide,* à cause de $a \in A'$.

— *A' est une partie ouverte de A.* — En effet soit $x \in A'$. Puisque x est un point de l'ouvert A de E, il existe une boule ouverte $\mathcal{B} = B_o(x, r)$ de E incluse dans A. Pour tout $y \in \mathcal{B}$ on obtient une ligne polygonale de E joignant a à y en adjoignant le segment $[x, y]$ — qui est inclus dans $\mathcal{B}$ et donc dans A — à une ligne polygonale joignant a à x. D'où $y \in A'$ et $\mathcal{B} \subset A'$.

— *A' est une partie fermée de A.* — En effet soit A'' l'adhérence de A' dans A, et soit $x \in A''$. D'après $x \in A$, il existe une boule ouverte $\mathcal{B} = B_o(x, r)$ de E incluse dans A Ayant arbitrairement choisi y dans l'ensemble non vide $A' \cap \mathcal{B}$, nous pouvons joindre y à a par une ligne polygonale incluse dans A ; en adjoignant à celle-ci le segment $[x, y]$, qui est inclus dans A, on constate $x \in A'$. On en déduit : $A'' = A'$. □

— A étant connexe, la seule partie non vide de A à la fois ouverte et fermée est A, et donc $A' = A$. □

Notons que la partie vide d'un e.v.n. est convexe, connexe pour arcs et ouverte. On peut donc supprimer « non vide » dans les énoncés des théorèmes II et III.

COROLLAIRE. — **Une partie ouverte d'un e.v.n. est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.**

On sait en effet que toute partie connexe par arcs est connexe (**2**.6.*3*, 2°).

3.1.*2*. Applications linéaires continues

> *Dans ce paragraphe, E et F désignent des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés. Il est d'usage de noter* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'ensemble des applications linéaires* continues *de E dans F (resp.* $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n\,; F)$ *l'ensemble des applications n-linéaires* continues *de* $E_1 \times \ldots \times E_n$ *dans F). L'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F (resp. n-linéaires de* $E_1 \times \ldots \times E_n$ *dans F) sera noté* $L(E, F)$ *(resp.* $L_n(E_1, \ldots, E_n\,; F)$*) dans les rares occasions où il intervient dans le Cours d'Analyse.* $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$*, noté E', est dit dual topologique de E.*

1° *Caractérisation des applications linéaires continues.* — THÉORÈME. — **Soient E un $\mathbb{K}$-e.v.n., F un $\mathbb{K}$-e.v.n., et u une application linéaire de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) **u est continue sur E ;**

ii) **u est continue en 0_E ;**
iii) **u est bornée sur la boule unité fermée $B = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$;**
iv) **u est bornée sur la sphère unité $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$;**
v) **Il existe un réel k tel que : $\forall\, x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$;**
vi) **u est lipschitzienne ;**
vii) **u est uniformément continue.**

i) $\Longrightarrow$ *ii*). Simple conséquence d'une définition.

ii) $\Longrightarrow$ *iii*). Par hypothèse, u est continue en 0_E. Ayant choisi $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ (par exemple $\varepsilon_0 = 1$), on peut lui associer $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall\, x \in E \qquad (\|x\| \leqslant \alpha_0) \Longrightarrow (\|u(x)\| \leqslant \varepsilon_0).$$

Pour tout $x \in B$, on a $\|\alpha_0 x\| \leqslant \alpha_0$, et donc $\|u(\alpha_0 x)\| \leqslant \varepsilon_0$, ce qui s'écrit $\|u(x)\| \leqslant \varepsilon_0/\alpha_0$. □

iii) $\Longrightarrow$ *iv*). Trivial.

iv) $\Longrightarrow$ *v*). Par hypothèse il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\, x \in S \qquad \|u(x)\| \leqslant k.$$

Pour tout $x \in E\backslash\{0_E\}$ on a $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$, et donc $\left\|u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant k$, ce qui s'écrit $\|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$. En outre, cette dernière inégalité est vérifiée pour $x = 0_E$. □

v) $\Longrightarrow$ *vi*). L'hypothèse étant *v*), on a :

$$\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad \|u(x)-u(y)\| = \|u(x-y)\| \leqslant k\,\|x-y\|.$$ □

vi) $\Longrightarrow$ *vii*) et *vii*) $\Longrightarrow$ *i*). Résultats connus.

2° *L'espace vectoriel normé* $\mathcal{L}(E, F)$. — Théorème et définition. — **Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v.n. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $L(E, F)$ des applications linéaires de E dans F.**

La boule B et la sphère S étant celles qui ont été définies au 1°, l'application $u \longmapsto \|u\| = \sup_{x \in B} \|u(x)\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Si $E \neq \{0_E\}$, on a :

$$\forall\, u \in \mathcal{L}(E, F) \qquad \|u\| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in S} \|u(x)\|.$$

Pour tous $(u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $x \in E$, on a :

$$\|(\alpha u+\beta v)(x)\| = \|\alpha u(x)+\beta v(x)\| \leqslant |\alpha|\,\|u(x)\| + |\beta|\,\|v(x)\| \qquad (1)$$

et, k et k' étant respectivement associés à u et v (assertion *v*) du 1°) :

$$\|(\alpha u+\beta v)(x)\| \leqslant (|\alpha|\,k + |\beta| k')\,\|x\|$$

D'où :

$$(\alpha u+\beta v) \in \mathcal{L}(E, F).$$

$\mathcal{L}(E, F)$, qui contient l'application nulle, est ainsi un sous-espace de $L(E, F,)$.

— On sait que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'application continue u est bornée sur B. D'où l'existence de l'application $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}_+$.

Si $\|u\| = 0$, alors, pour tout $x \in B$, $\|u(x)\| = 0$ et donc $u(x) = 0_F$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrivant $\|x\|\, y$, avec $y \in B$, on a $u(x) = 0_F$ pour tout $x \in E$; u est donc l'élément nul de $\mathcal{L}(E, F)$.

— $\|\alpha\, u\| = |\alpha|\, \|u\|$ et $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ se vérifient tout aussi facilement en utilisant (1).

— Soient $a = \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ et $b = \sup\limits_{x \in S} \|u(x)\|$, (lorsque $E \neq \{0_E\}$).

On a : $b \leqslant \|u\|$. En remarquant que $x \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|}$ est une surjection de $E\backslash\{0_E\}$ sur S, on obtient $a = b$. Enfin de la définition de a on déduit : $(\forall\, x \in B \quad \|u(x)\| \leqslant a)$, et donc $\|u\| \leqslant a$. □

Remarque. — Il est utile de retenir que $\|u\|$ est le plus petit des réels positifs k tels que :

$$\forall\, x \in E \qquad \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$$

Convention. — L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ sera toujours considéré comme muni de la norme définie ci-dessus. Celle-ci dépend, bien entendu, des normes considérées sur E et F.

3° Théorème. — **Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-e.v.n. Pour tous $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, on a $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|v \circ u\| \leqslant \|v\|\, \|u\|$.**

— L'appartenance de $v \circ u$ à $\mathcal{L}(E, G)$ tient au fait que la composée de deux applications linéaires (resp. continues) possède la même propriété.

— De : $\forall\, x \in E \qquad \|u(x)\| \leqslant \|u\|\; \|x\|$

et : $\forall\, y \in F \qquad \|v(y)\| \leqslant \|v\|\; \|y\|$

on déduit : $\forall\, x \in E \qquad \|v \circ u(x)\| \leqslant \|v\|\; \|u\|\; \|x\|$.

D'où : $\qquad \|v \circ u\| \leqslant \|v\|\; \|u\|$. □

4° ***Applications linéaires bicontinues.*** — Théorème. — **Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v.n., et u une surjection linéaire de E sur F. Pour que u soit un homéomorphisme, il faut et il suffit qu'il existe des réels α et β strictement positifs tels que :**

$$\forall\, x \in E \qquad \alpha\, \|x\| \leqslant \|u(x)\| \leqslant \beta\, \|x\|. \tag{2}$$

La condition est nécessaire. — Par hypothèse u est bijective, u et u^{-1} sont continues.

Il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, x \in E \qquad \|u(x)\| \leqslant \beta\, \|x\|$.

Il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, y \in F \qquad \|u^{-1}(y)\| \leqslant \gamma\, \|y\|$,

et (en le remplaçant éventuellement par un réel plus grand), on peut supposer $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui permet de poser $\gamma = \alpha^{-1}$. On peut aussi supposer $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

En faisant $y = u(x)$ dans la dernière inégalité, on obtient :

$$\forall\, x \in E \qquad \|x\| \leqslant \alpha^{-1}\, \|u(x)\|.$$ □

La condition est suffisante. — Par hypothèse la condition (2) est remplie. Il en résulte que u est injective, et donc bijective. En effet :

$$\forall x \in E \qquad (u(x) = 0) \Longrightarrow (\alpha \|x\| = 0).$$

D'autre part u est β-lipschitzienne, et donc continue. Enfin :

$$\forall y \in F \qquad \alpha \|u^{-1}(y)\| \leqslant \|u(u^{-1}(y))\|$$

ce qui montre que u^{-1} est α^{-1}-lipschitzienne et donc continue. □

5° ***Isomorphisme d'e.v.n.*** — DÉFINITION. — **Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v.n. On appelle isomorphisme de l'e.v.n. E sur l'e.v.n. F tout isomorphisme de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel F, qui est un homéomorphisme.**

L'ensemble des isomorphismes (d'e.v.n.) de E sur F se note Isom (E, F).

EXEMPLE. — Un isomorphisme d'espace vectoriel qui conserve la norme (isométrie) est un isomorphisme d'e.v.n.

3.1.3. Applications multilinéaires continues

1° THÉORÈME. — **Soient $E_1, \ldots, E_n$, des $\mathbb{K}$-e.v.n., F un $\mathbb{K}$-e.v.n. et $u : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ une application n-linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) **u est continue sur l'espace produit $E_1 \times \ldots \times E_n$;**

ii) **u est continue en $O = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$;**

iii) **u est bornée sur $B_1 \times \ldots \times B_n$, où B_i est la boule unité fermée de E_i ;**

iv) **u est bornée sur $S_1 \times \ldots \times S_n$, où S_i est la sphère unité de E_i ;**

v) **Il existe un réel k tel que :**

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \qquad \|u(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant k \|x_1\| \ldots \|x_n\|.$$

Nous pouvons considérer la topologie-produit sur $E_1 \times \ldots \times E_n$ comme induite par la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\|x_i\|)$.

i) $\Longrightarrow$ *ii*). Simple conséquence d'une définition.

ii) $\Longrightarrow$ *iii*). Par hypothèse u est continue en O. Ayant choisi $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on peut lui associer $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \qquad (\max_i \|x_i\| \leqslant \alpha_0) \Longrightarrow (\|u(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant \varepsilon_0)$$

Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in B_1 \times \ldots \times B_n$, on a, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\|\alpha_0 x_i\| \leqslant \alpha_0$, et donc :

$\|u(\alpha_0 x_1, \ldots, \alpha_0 x_n)\| \leqslant \varepsilon_0$, ce qui s'écrit $\|u(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant \varepsilon_0/\alpha_0^n$. □

iii) $\Longrightarrow$ *iv)*. Trivial.

iv) $\Longrightarrow$ *v)*. Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n \qquad \|u(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant k.$$

Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ tel qu'aucun des x_i n'est nul, on a :

$$\left\| u\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \right\| \leqslant k,$$

et donc $\|u(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant k \|x_1\| \ldots \|x_n\|$.

En outre, cette dernière inégalité est vérifiée dès que l'un des x_i est nul. □

v) $\Longrightarrow$ *i)*. L'hypothèse est *v)*. Nous allons prouver la continuité de u au point $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$. Pour cela écrivons :

$$\Delta = u(x_1, \ldots, x_n) - u(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

avec : $\quad \Delta_i = u(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) - u(a_1, \ldots, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

En utilisant la n-linéarité, on a :

$$\Delta_i = u(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Compte tenu de l'hypothèse, il vient :

$$\|\Delta\| \leqslant k \sum_{i=1}^{n} \|a_1\| \ldots \|a_{i-1}\| \, \|x_i - a_i\| \, \|x_{i+1}\| \ldots \|x_n\|$$

Soit B une boule ouverte de centre $(a_1, \ldots, a_n)$ et M un majorant de $\|(x_1, \ldots, x_n)\|$ sur B. Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in B$ on a :

$$\|\Delta\| \leqslant kM^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \|x_i - a_i\| \leqslant k\, n\, M^{n-1} \|x - a\|$$

ce qui montre que la restriction de u à B est continue en $(a_1, \ldots, a_n)$; comme B est un voisinage de $(a_1, \ldots, a_n)$, il en est de même pour u. □

EXEMPLE. — Le *produit usuel*, $(x, y) \longmapsto xy$ est une application continue de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$.

REMARQUE. — Contrairement au cas des applications linéaires continues, ici il n'y a pas continuité uniforme. Cependant, il est facile de prouver, en modifiant légèrement la démonstration ci-dessus, qu'une application multilinéaire continue est uniformément continue sur toute partie bornée de l'e.v.n. E.

2° *L'espace vectoriel normé* $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n ; F)$. — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient $E_1, \ldots, E_n$, F des $\mathbb{K}$-e.v.n. L'ensemble $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n ; F)$ des applications n-linéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $L_n(E_1, \ldots, E_n ; F)$ des applications n-linéaires**

de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F. L'application $u \longmapsto \|u\|$ de $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n ; F)$ dans $\mathbb{R}_+$, définie par :

$$\|u\| = \sup_{x \in B_1 \times \ldots \times B_n} \|u(x_1, \ldots, x_n)\|$$

est une norme sur $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n ; F)$. Enfin si pour tout i, $E_i \neq \{0_{E_i}\}$,

$$\|u\| = \sup_{x_i \neq 0_{E_i}} \frac{\|u(x_1, \ldots, x_n)\|}{\|x_1\| \ldots \|x_n\|} = \sup_{x \in S_1 \times \ldots \times S_n} \|u(x_1, \ldots, x_n)\|$$

Les démonstrations sont analogues à celles faites pour $\mathcal{L}(E, F)$.

Par la suite, une application n-linéaire et continue sera appelée *produit*.

3° ***Algèbre normée.*** — DÉFINITION. — **On appelle algèbre normée toute $\mathbb{K}$-algèbre E munie d'une norme telle que :**

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Si de plus E est complet pour cette norme, on parle d'algèbre de Banach.

EXEMPLES. — * *a*) Soit E un espace vectoriel normé. $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre normée, et si E est de Banach, $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach, (cf. 3.1.4, 5°). *

* *b*) Nous introduirons en Géométrie le produit scalaire, le produit mixte et le produit vectoriel, dans un espace euclidien éventuellement orienté. *

c) Soit E l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à éléments dans $\mathbb{K}$. Pour toute matrice $M = (\alpha_{ij})_{i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_n}$ on pose $\|M\| = n \sup_{i,j} |\alpha_{ij}|$. $M \longmapsto \|M\|$ est une norme sur E, et on vérifie que E, muni de cette norme, est une algèbre normée (* et même une algèbre de Banach : cf. 3.1.5 *)

3.1.4. Continuité des opérations dans un e.v.n.

1° THÉORÈME I. — **Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.n. L'application $(x, y) \longmapsto x+y$ de E^2 dans E est uniformément continue. L'application $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E est continue.**

— Les distances associées aux trois normes usuelles sur un e.v.n. produit étant équivalentes, il suffit de faire la démonstration pour l'une d'entre elles. Choisissons sur E^2 : $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. $(x, y) \longmapsto x+y$ étant linéaire, la première assertion résulte alors de $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ et de 3.1.2, 1°.

— De même, $\mathbb{K}$ étant muni de la norme $\alpha \longmapsto |\alpha|$, la deuxième assertion résulte de ce que $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ est bilinéaire, et de : $\|\alpha x\| \leqslant |\alpha| \, \|x\|$.

THÉORÈME II. — **Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.n. Pour tout $a \in E$, la translation $\tau_a : x \longmapsto x+a$ est une isométrie ; pour tout $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, l'homothétie $h_\alpha : x \longmapsto \alpha x$ est un isomorphisme d'e.v.n.**

Vérification immédiate (on notera que τ_a n'est pas linéaire).

• Les e.v.n. sont un cas particulier des e.v.t. ainsi définis :

DÉFINITION. — **On appelle espace vectoriel topologique** (e.v.t.) **tout couple** $(E, \mathcal{T})$, **où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{T}$ une topologie de E pour laquelle**

$$E \times E \to E \qquad (x, y) \longmapsto x+y \; ; \quad K \times E \to E \qquad (\alpha, x) \longmapsto \alpha x$$

sont des applications continues.

2° ***Opérations sur les limites.*** — THÉORÈME. — **Soient** X **un espace topologique,** E, F, G **des e.v.n. Soient** A **une partie de** X **et** a **un point de** $\overline{A}$.

i) **Si** f **et** g **sont des fonctions de** X **vers** E, **définies sur** A, **telles que :**

$$l = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x) \quad \text{et} \quad m = \lim_{x \to a,\, x \in A} g(x), \quad \textbf{alors} :$$

$$l+m = \lim_{x \to a,\, x \in A} [f(x) + g(x)] \tag{1}$$

ii) **Si** f **est une fonction de** X **vers** E, φ **une fonction de** X **vers** $\mathbb{K}$, **définies sur** A, **telles que :**

$$l = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x) \quad \text{et} \quad \alpha = \lim_{x \to a,\, x \in A} \varphi(x), \quad \textbf{alors} :$$

$$\alpha l = \lim_{x \to a,\, x \in A} \varphi(x) f(x) \tag{2}$$

iii) **Si** $(x, y) \longmapsto x \top y$ **est un produit de** $E \times F$ **dans** G, **si** f **est une fonction de** X **vers** E **et** g **une fonction de** X **vers** F, **définies sur** A, **telles que :**

$$l = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x) \quad \text{et} \quad m = \lim_{x \to a,\, x \in A} g(x), \quad \textbf{alors} :$$

$$l \top m = \lim_{x \to a,\, x \in A} [f(x) \top g(x)] \tag{3}$$

Voici, à titre d'exemple, la démonstration de *i*).

La restriction de $f+g$ à A s'écrit $\psi \circ \theta$, avec :

$$\theta : A \to E^2 \quad x \longmapsto [f(x), g(x)]; \qquad \psi = E^2 \to E \quad (x, y) \longmapsto x+y$$

ψ est continue sur E^2 ; θ admet (l, m) pour limite en a suivant A. La proposition résulte du théorème sur la composition des limites. □

3° ***Extension* à** $\overline{\mathbb{R}}$. — Le théorème précédent groupe tous les cas usuels que nous rencontrerons d'opérations sur les limites, à l'exception du cas des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, qui n'est pas un e.v.n.

• En utilisant le même procédé que ci-dessus, il s'agit maintenant d'étudier la continuité des fonctions $(x, y) \longmapsto x+y$ et $(x, y) \longmapsto xy$ de $\overline{\mathbb{R}}^2$ vers $\overline{\mathbb{R}}$. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$; les restrictions des fonctions à $\mathbb{R}^2$, qui est un voisinage de (x_0, y_0) dans $\overline{\mathbb{R}}^2$, sont continues en (x_0, y_0) ; les fonctions elles-mêmes sont continues en (x_0, y_0). Plus généralement, le lecteur vérifiera que *chacune des fonctions est continue en tout point où elle est définie.*

Les théorèmes précédents sur la somme et le produit sont donc encore valables, à l'exception (les notations étant celles du 2°) :

— *Pour la somme*, des cas $(l, m) = (+\infty, -\infty)$ ou $(l, m) = (-\infty, +\infty)$.

— *Pour le produit*, des cas $(l, m) = (0, +\infty)$ ou $(l, m) = (+\infty, 0)$ ou $(l, m) = (0, -\infty)$ ou $(l, m) = (-\infty, 0)$.

• Notons enfin que la continuité de $x \longmapsto 1/x$, application de $\mathbb{K}^*$ dans $\mathbb{K}$, permet d'énoncer des résultats sur la limite d'un quotient. On peut les étendre aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, grâce à :

$$\lim_{x \to +\infty,\, x \neq +\infty} (1/x) = \lim_{x \to -\infty,\, x \neq -\infty} (1/x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0,\, x > 0} (1/x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0,\, x < 0} (1/x) = -\infty$$

4° *Applications. — a) Adhérence d'un sous-espace.* — THÉORÈME. — **Soient E un e.v.n. et F un sous-espace vectoriel de E. Alors l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel de E.**

— $\overline{F}$ est une partie non vide de E.

— Soit $(x, y) \in \overline{F}^2$. On a : $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$, où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites d'éléments de F. D'après le 2°, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha x + \beta y = \lim (\alpha x_n + \beta y_n)$. Or $\alpha x_n + \beta y_n \in F$, et donc $\alpha x + \beta y \in \overline{F}$. □

COROLLAIRE. — **Un hyperplan d'un e.v.n. est fermé ou dense.**

Soit H un hyperplan de l'e.v.n. E. $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, vérifiant : $H \subset \overline{H} \subset E$. H étant un hyperplan, deux cas seulement sont possibles : $H = \overline{H}$ (H fermé) ou $\overline{H} = E$ (H dense). □

Pour la caractérisation des hyperplans fermés, le lecteur consultera l'exercice n° 3.08.

b) Intérieur et adhérence des boules. — THÉORÈME. — **Soient E un e.v.n. et $\mathcal{B}$ une boule, ouverte ou fermée, de E. L'intérieur (resp. l'adhérence) de $\mathcal{B}$ est la boule ouverte (resp. fermée) de même centre et de même rayon.**

Il est commode de se ramener, par translation, à une boule de centre 0_E (un homéomorphisme conserve intérieur et adhérence).

Soit donc $\mathcal{B}$ une boule, ouverte ou fermée, de centre 0_E et de rayon r. On a manifestement :

$$B_0(0_E, r) \subset \mathring{\mathcal{B}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathcal{B}} \subset B_f(0_E, r)$$

Reste à prouver : $\forall x \in S(0_E, r) \;\; x \in \overline{\mathcal{B}}$ et $x \notin \mathring{\mathcal{B}}$ (assertion automatiquement vérifiée si $E = \{0_E\}$.) Soit $x \in S(0_E, r)$:

— A tout $n \in \mathbb{N}^*$, associons $x_n = (1 - 1/n)x$. On a $\|x_n\| = (1 - 1/n)r$ et donc $x_n \in \mathcal{B}$. Comme $x = \lim x_n$, on a $x \in \overline{\mathcal{B}}$ (2.3.5, 2°).

— Si l'on avait $x \in \mathring{\mathcal{B}}$, il existerait $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall y \in E \qquad (\|y - x\| \leqslant \alpha \implies y \in \mathcal{B}).$$

En particulier le point $y = \left(1 + \dfrac{\alpha}{r}\right) x$ appartiendrait à $\mathcal{B}$, ce qui est absurde, puisque $\|y\| > r$. □

5° *Une propriété de $\mathcal{L}(E, F)$.* — THÉORÈME. — **Soient E un e.v.n. et F un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. On a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \geqslant N \qquad \|u_n - u_p\| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Il en résulte, pour tout x *fixé* dans E :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \geqslant N \quad \|u_n(x) - u_p(x)\| \leqslant \varepsilon \, \|x\|.$$

Donc la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de l'espace de Banach F, et donc une suite convergente.

Notons $u(x)$ sa limite. Nous définissons ainsi une application $u : E \to F$.

— Soit $(x, y) \in E^2$: $u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$ et $u(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(y)$.

D'après les théorèmes sur les opérations sur les limites, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$\alpha u(x) + \beta u(y) = \lim_{n\to+\infty} [\alpha u_n(x) + \beta u_n(y)] = \lim_{n\to+\infty} u_n(\alpha x + \beta y) = u(\alpha x + \beta y).$$

Ainsi u est une application linéaire.

— Montrons que u est continue. Choisissons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après (1), on peut lui associer $N \in \mathbb{N}$, fixé tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \forall p \geqslant N \quad \forall x \in E \quad \|u_n(x) - u_p(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|.$$

Pour x donné, et $n \geqslant N$ fixé, $u(x) = \lim_{p\to+\infty} u_p(x)$ permet d'écrire, en utilisant la continuité de $z \longmapsto \|z\|$: $\|u_n(x) - u(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$.

Nous avons ainsi :

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad \|(u_n - u)(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\| \tag{2}$$

Pour n fixé, on déduit de (2) que l'application linéaire $u_n - u$ est continue. En écrivant $u = u_n - (u_n - u)$ et en utilisant la continuité de u_n, on en déduit que u est continue.

— Maintenant (2) peut s'écrire (en ne fixant plus ε) :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad \|u_n - u\| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

qui traduit $u = \lim u_n$ dans $\mathcal{L}(E, F)$. □

6° ***Quelques isométries importantes.*** — PROPOSITION I. — **Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-e.v.n.**

i) **Pour toute application bilinéaire et continue $u \in \mathcal{L}_2(E, F; G)$ et tout $x \in E$, l'application $u_x : y \longmapsto u(x, y)$ de F dans G est linéaire et continue.**

ii) **L'application $\tilde{u} : E \to \mathcal{L}(F, G)$ $\quad x \longmapsto u_x$ est linéaire et continue.**

iii) **L'application $\psi : \mathcal{L}_2(E, F; G) \to \mathcal{L}[E, \mathcal{L}(F, G)]$ $\quad u \longmapsto \tilde{u}$ est un isomorphisme algébrique qui conserve la norme ; on le qualifie d'isométrie canonique ; ψ^{-1} est déterminé par :**

Pour tout $v \in \mathcal{L}[E, \mathcal{L}(F, G)]$, $\psi^{-1}(v)$ s'écrit $(x, y) \longmapsto (v(x))(y)$.

i) *ii*). Les linéarités de u_x et de $\tilde{u}$ ont été vues au **9.1.*1***, 2° du tome I. La continuité de u_x résulte de :

$$\forall y \in F \qquad \|u_x(y)\| = \|u(x, y)\| \leqslant M \|y\|, \text{ avec } M = \|u\| \|x\|.$$

Nous avons : $\forall x \in E \qquad \|\tilde{u}(x)\| = \|u_x\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|u(x, y)\|$,

$$\forall x \in E \qquad \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\tilde{u}(x)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1} \|u(x, y)\| = \|u\|.$$

D'où la continuité de $\tilde{u}$, et l'égalité $\|\tilde{u}\| = \|u\|$.

iii). ψ, qui est visiblement linéaire, est ainsi continue et elle conserve la norme. Elle est donc injective. Reste à montrer qu'elle est surjective.

Soit $v \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$. Associons lui l'application

$$u : E \times F \to G \qquad (x, y) \longmapsto (v(x))(y).$$

On constate que u est bilinéaire et que :

$$\forall (x, y) \in E \times F \qquad \|u(x, y)\| \leqslant M' \|x\| \|y\|, \qquad \text{avec } M' = \|v\|.$$

On en déduit $u \in \mathcal{L}_2(E, F; G)$. On peut donc parler de $\psi(u)$; on constate $\psi(u) = v$. □

Un raisonnement analogue, laissé au lecteur fournit :

Proposition II. — **Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-e.v.n., et m un entier tel que $1 \leqslant m \leqslant n-1$.**

i) **Pour toute application n-linéaire et continue $u \in \mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$ l'application**

$$U_x : E_{m+1} \times \ldots \times E_n \to F$$
$$(x_{m+1}, \ldots, x_n) \longmapsto u(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

est $n-m$ linéaire et continue.

ii) $$\tilde{U} : E_1 \times \ldots \times E_m \to \mathcal{L}_{n-m}(E_{m+1}, \ldots, E_n; F) \qquad x \longmapsto U_x$$

est m linéaire et continue.

iii) $$\Psi : \mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F) \to \mathcal{L}_m(E_1, \ldots, E_m; \mathcal{L}_{n-m}(E_{m+1}, \ldots, E_n; F))$$
$$u \longmapsto \tilde{U}$$

est un isomorphisme algébrique qui conserve la norme.

Compte tenu des propositions I et II, on démontre par récurrence :

Théorème. — **Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-e.v.n. L'application**

$$\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \ldots, \mathcal{L}(E_n, F)) \ldots) \to \mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

qui, à l'application linéaire v associe l'application n-linéaire u définie par :

$$u(x_1, \ldots, x_n) = (\ldots((v(x_1))\ (x_2)) \ldots (x_n))$$

est un isomorphisme algébrique qui conserve la norme : on le qualifie d'isométrie canonique.

Convention. — Dans la suite nous écrirons $v \cdot x_1$ pour $v(x_1)$, $v \cdot x_1 \cdot x_2$ pour $(v(x_1))(x_2)$, ..., et $v \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ pour $(\ldots((v(x_1))(x_2)) \ldots (x_n))$.

3.1.5. Normes équivalentes

1° *Comparaison de deux normes.* — DÉFINITION. — **Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, N_1 et N_2 des normes sur E, $\mathcal{T}_i$ la topologie de la norme N_i ($i \in \{1, 2\}$). On dit que la norme N_2 est plus fine que la norme N_1, et on note $N_2 \succ N_1$ (ou $N_1 \prec N_2$) si et seulement si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.**

La relation $\prec$ est un préordre sur l'ensemble des normes sur E.

THÉORÈME. — **Etant données deux normes N_1 et N_2 sur un e.v.n. E, N_2 est plus fine que N_1 si et seulement si :**

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, x \in E \qquad N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x). \tag{1}$$

Désignons par E_i l'e.v.n. (E, N_i). $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ équivaut à l'assertion : Id_E est une application continue de E_2 dans E_1. Comme Id_E est linéaire, cette assertion est équivalente à (1). □

2° *Normes équivalentes.* — DÉFINITION. — **Deux normes N_1 et N_2 sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dites équivalentes si et seulement si l'on a simultanément : $N_1 \prec N_2$ et $N_2 \prec N_1$.**

Il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E. Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\forall\, x \in E \qquad (N_1(x) \leqslant \alpha\, N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leqslant \beta\, N_1(x)).$$

THÉORÈME. — **Pour que deux normes sur un même espace vectoriel définissent la même topologie, il faut et il suffit qu'elles soient équivalentes. Les distances associées sont alors équivalentes, et les suites de Cauchy sont les mêmes pour les deux normes. L'espace est donc de Banach pour une norme si et seulement s'il l'est pour l'autre.**

C'est une conséquence du 1°. □

EXEMPLES. — *a*) Sur $\mathbb{K}^n$, les trois normes standard sont équivalentes. Ce résultat sera amélioré au 3°.

b) Les normes définies dans l'exemple *c*) du 3.1.*1*. 1°, ne sont pas équivalentes (cf. exercice n° 3.11).

3° *Cas des espaces de dimension finie.* — THÉORÈME. — **Soit n un entier strictement positif. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, les normes sont deux à deux équivalentes.**

Nous considérerons ici $\mathbb{K}^n$ comme muni de la norme $\nu_1 : x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, qui définit la topologie usuelle, notée $\mathcal{T}_1$.

Soit $x \longmapsto \|x\|$ une autre norme sur $\mathbb{K}^n$. On va montrer qu'elle est équivalente à ν_1; le théorème en résultera (transitivité de l'équivalence).

— Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a :

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|e_i\|.$$

En posant $\beta = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\|$, on constate :

$$\forall x \in E \qquad \|x\| \leqslant \beta \, v_1(x). \tag{2}$$

— On en déduit que $x \longmapsto \|x\|$, considérée comme application de $(\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_1)$ dans $\mathbb{R}$ est continue ; en effet, pour tous x et y dans $\mathbb{K}^n$:

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x - y\| \leqslant \beta \, v_1(x - y).$$

Soit S la sphère-unité $S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid v_1(x) = 1\}$; on a $S \neq \varnothing$, d'après $n > 0$.

S est un fermé de $(\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_1)$, borné pour la distance d_1, et donc un compact. D'après **2**.5.*1*, 5°, l'application continue $x \longmapsto \|x\|$ admet une borne inférieure α, qu'elle atteint en un point de S, donc en un point distinct de 0, ce qui exige $\alpha > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, on a $\dfrac{x}{v_1(x)} \in S$, et donc $\left\| \dfrac{x}{v_1(x)} \right\| \geqslant \alpha$, ce qui s'écrit $\alpha \, v_1(x) \leqslant \|x\|$. Cette dernière inégalité étant vérifiée par $x = 0$, on a :

$$\forall x \in E \qquad \alpha \, v_1(x) \leqslant \|x\|. \tag{3}$$

L'équivalence des normes v_1 et $\|\cdot\|$ résulte de (2) et (3). □

Corollaire I. — **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Les normes sur E sont deux à deux équivalentes.**

Il existe des isomorphismes algébriques de $\mathbb{K}^n$ sur E. Soit u l'un d'entre eux. Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur E, $N : x \longmapsto \|u(x)\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. □

En remarquant que u est une isométrie de $(\mathbb{K}^n, N)$ sur $(E, \|\cdot\|)$, on a :

Corollaire II. — **Tout e.v.n. de dimension finie est un espace de Banach. Les parties compactes en sont les parties fermées bornées.**

Notons qu'ici la notion de *borné* est intrinsèque.

Corollaire III. — **Tout sous-espace de dimension finie d'un e.v.n. est fermé.**

Pour la norme induite, un tel sous-espace est complet, donc fermé (**2**.4.*2*, 2°). □

Corollaire IV. — **Soient E un espace topologique, A une partie de E et $a \in \bar{A}$; soient F un e.v.n. de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de F et f une fonction de E vers F dont l'ensemble de définition contient A. Si on définit les fonctions f_i par :**

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \, e_i$$

alors, pour que f admette $l = \sum_{i=1}^{n} l_i e_i$ comme limite lorsque x tend vers a en appartenant à A, il faut et il suffit que chaque f_i admette, dans les mêmes conditions, l_i pour limite.

On utilise l'isométrie définie dans la démonstration du corollaire I entre F et $\mathbb{K}^n$. Le corollaire IV est alors une conséquence immédiate du théorème sur les limites de fonctions à valeurs dans un produit. □

4° THÉORÈME I. — **Toute application linéaire u d'un e.v.n. E de dimension finie dans un e.v.n. F est continue.**

Les normes sur E étant deux à deux équivalentes, adoptons la norme N_1 obtenue en choisissant une base $(e_1, \ldots, e_n)$ et en posant :

Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|.$

On a ainsi, en désignant par $\|\cdot\|$ la norme sur F :

$$\forall\, x \in E \qquad \|u(x)\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\xi_i|\, \|u(e_i)\| \leqslant k\, N_1(x)$$

où k désigne $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|u(e_i)\|$. □

REMARQUE. — On sait (3.1.2, 2°) qu'étant donnés les e.v.n. (E, N_1) et $(F, \|\cdot\|)$, $\mathcal{L}(E, F)$ peut être muni de la norme $u \longmapsto \sup_{N_1(x) \leqslant 1} \|u(x)\|$. Ici cette norme n'est autre que

$$u \longmapsto k = \max_i \|u(e_i)\|.$$

En effet, d'après la démonstration précédente, $\|u\| \leqslant k$. On a de plus $N_1(e_i) = 1$, et donc $\|u\| \geqslant \|u(e_i)\|$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$; d'où : $\|u\| \geqslant k$. □

THÉORÈME II. — **Soient $E_1, \ldots, E_n$ des e.v.n. de dimension finie et F un e.v.n. Toute application n-linéaire $u : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est continue.**

Vérification laissée au lecteur, (choisir des bases dans les E_i, et montrer que u est bornée sur $B_1 \times \ldots \times B_n$). □

5° *Complément.* — THÉORÈME DE RIESZ. — **Pour qu'un espace vectoriel normé E soit de dimension finie, il faut et il suffit que la boule unité $B = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$ soit compacte.**

La condition est nécessaire d'après le corollaire II du 3°. Inversement supposons que B est compacte. On peut alors recouvrir B par un nombre fini de boules $B_0(a_i, 1/2) (i \in \mathbb{N}_n)$. Soit : $F = \mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_n)$, F est de dimension finie, donc fermé (corollaire III). Nous allons montrer par l'absurde que $F = E$.

Faisons l'hypothèse $(H) : F \neq E$. Il existe donc $x \in E \backslash F$ et, F étant fermé, on a

$$d(x, F) = \alpha > 0.$$

On en déduit l'existence de $y \in F$ tel que

$$\alpha \leqslant \|x - y\| \leqslant 3\alpha/2 \qquad (4)$$

Le vecteur $z = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$ vérifie $\|z\| = 1$; il existe donc $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $z \in B_0(a_i, 1/2)$. On a :

$$\left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} - a_i \right\| \leqslant 1/2$$

et, compte tenu de (4) : $\|x - y - \|x-y\|a_i\| \leqslant 3\alpha/4$.

Comme $y + \|x-y\|a_i$ est un élément de F, on obtient une contradiction avec $d(x, F) = \alpha$. (H) est donc absurde. □

Application. — Il peut arriver qu'en raisonnant sur la compacité on puisse montrer qu'un e.v.n. est de dimension finie sans expliciter la valeur de la dimension.

EXERCICES

3.01. — Soient E un e.v.n., A et B deux parties de E, $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer :

a) Si A *ou* B est ouvert, $A+B$ est ouvert.

b) Si A et B sont compacts, $A+B$ est compact.

c) Si A est compact et B fermé, $A+B$ est fermé.

d) Donner un exemple dans lequel A et B sont fermés, sans que $A+B$ le soit.

3.02. — Soient E et F deux e.v.n., et u une application linéaire de E dans F. Montrer que si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E, de limite 0, $[u(x_n)]_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans F, alors u est continue.

3.03. — Soient E un $\mathbb{R}-$ e.v.n. et $f : E \to E$ une application bornée sur la boule unité, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que f est linéaire et continue. Ce résultat subsiste-t-il si on suppose seulement f bornée sur la sphère unité ?

3.04. — *a*) L'ensemble l^∞ des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On le munit de la norme $x \longmapsto \|x\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Montrer que l^∞ est un espace de Banach.

b) Montrer que le sous-ensemble l^0 de l^∞, formé des suites qui admettent 0 pour limite, est un espace de Banach.

3.05. — Soient E un e.v.n., F un espace de Banach, E_0 un sous-espace dense de E, et u une application linéaire continue de E_0 dans F. Montrer qu'il existe un prolongement linéaire et continu unique de u, $\bar{u} : E \to F$. Montrer que $\|\bar{u}\| = \|u\|$.

3.06. — Montrer qu'il n'existe pas deux applications linéaires et continues, u et v, d'un e.v.n. non nul E dans lui-même telles que :

$$v \circ u - u \circ v = Id_E.$$

Indication : Sinon, on aurait : $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad v \circ u^{n+1} - u^{n+1} \circ v = (n+1)u^n$

3.07. — E est l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ ($f \in E$ est $k(f)$-lipschitzienne).

a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) On pose $M(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $N(f) = M(f) + k(f)$. Montrer que M et N sont des normes sur E, non équivalentes.

3.08. — Soient E un e.v.n., et H un hyperplan de E. On sait que $H = \operatorname{Ker} u$, avec $u \in E^* \backslash \{0\}$.

a) Montrer que si u est continue, H est fermé.

b) Démontrer la réciproque : on suppose H fermé, et soit $a \notin H$. Considérer $a+H$, et montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_f(0, r) \cap (a+H) = \emptyset$. Montrer enfin que u est bornée sur $B_f(0, r)$.

3.09. — Soient E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et g fixé dans E. On pose

$$N_g(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)\, g(t)|.$$

a) Montrer que N_g est une semi-norme, et que c'est une norme si et seulement si $g^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.

b) Montrer que la norme $N_\infty : f \longmapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ est plus fine que N_g, et qu'elles sont équivalentes si et seulement si $g^{-1}(0) = \emptyset$.

3.10. — Soient E et F deux espaces de Banach, et u une application linéaire continue surjective de E sur F.

a) en utilisant l'exercice n° 38 du chapitre 2 montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_k = \{u(x) \,|\, (x \in E) \wedge \|x\| \leqslant k\}$ vérifie $\mathring{\overline{A}}_k \neq \emptyset$.

b) Montrer qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que tout élément $y \in F$, tel que $\|y\| \leqslant \eta$, soit limite d'une suite $u(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $x_n \in E$ et $\|x_n\| \leqslant 2k$. (Utiliser l'existence d'un point *intérieur* à $\overline{A_k}$).

c) On pose $\delta = \eta/(2k)$. Montrer :

$$\forall\, y \in F \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, x \in E \qquad \left(\|x\| \leqslant \frac{1}{\delta} \|y\| \quad \text{et} \quad \|y - u(x)\| \leqslant \varepsilon \right).$$

d) Soient $y \in F$, tel que $\|y\| < \delta$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de E telle que $\|x_1\| < 1$,

$$\|y - u(x_1) - \ldots - u(x_n)\| \leqslant 2^{-n} \delta \varepsilon \quad \text{et} \quad \|x_{n+1}\| \leqslant 2^{-n} \varepsilon \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

En déduire que pour tout $y \in F$ tel que $\|y\| < \delta$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leqslant 1$ et $y = u(x)$.

e) En déduire : Si E et F sont des espaces de Banach, et si $u : E \longrightarrow F$ est une application linéaire continue et bijective, alors u^{-1} est continue.

Les exercices qui suivent nécessitent une connaissance des propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions continues.

On désigne par E l'espace vectoriel des applications continues de [0, 1] *dans* $\mathbb{R}$.

3.11. — On définit sur E les trois applications :

$$N_1 : f \longmapsto \int_0^1 |f(t)| \, dt$$

$$N_2 : f \longmapsto \left(\int_0^1 f^2(t) \, dt\right)^{1/2}$$

$$N_\infty : f \longmapsto \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

a) Montrer que ce sont des normes sur E.

b) On considère les applications f_n définies comme suit (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

Pour $t \in \left[0, \frac{1}{2n}\right]$ $\qquad f_n(t) = 2nt.$

Pour $t \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ $\qquad f_n(t) = -2nt+2.$

Pour $t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ $\qquad f_n(t) = 0.$

En étudiant les suites (f_n) et $(\sqrt{n} f_n)$, montrer que les normes N_1, N_2, N_∞ sont deux à deux non équivalentes.

3.12. — On se propose de montrer que E n'est pas complet pour la norme N_1 (notation de l'exercice précédent). Soit $f_n \in E$ définie par :

$$f_n(t) = 1 \text{ pour } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad f_n(t) = 0 \text{ pour } t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right],$$

f_n étant affine sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]$. Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans E (sans faire de longs calculs) et que (f_n) ne converge pas.

3.13. — On munit E de la norme N_2. Soit $c \in [0, 1]$. Montrer que l'application $f \longmapsto f(c)$ de E dans $\mathbb{R}$ n'est pas continue.

Les exercices qui suivent font appel à la théorie des espaces euclidiens et des endomorphismes d'espaces euclidiens.

3.14. — Soit l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (structure euclidienne canonique). Montrer que $O(\mathbb{R}^3)$, groupe orthogonal de $\mathbb{R}^3$, est une partie compacte de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Plus généralement E étant un espace euclidien de dimension finie montrer que $O(E)$, groupe

orthogonal de E, est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$. Montrer des résultats analogues avec $SO(E)$ (sous groupe spécial orthogonal).

3.15. — Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, montrer que $O(\mathbb{R}^3)$ n'est pas connexe. Montrer que $SO(\mathbb{R}^3)$ est connexe par arcs. En déduire que $O(\mathbb{R}^3)$ a deux composantes connexes.

Démontrer des résultats analogues pour $SO(E)$, E espace euclidien de dimension finie.

3.16. — On considère l'e.v.n. $\mathbb{C}^3$. Montrer que, dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$:

— le sous-ensemble constitué par les endomorphismes diagonalisables est dense,

— le groupe linéaire $GL(n)$ est dense.

*En déduire, en utilisant les matrices diagonales, que, pour toute matrice carrée complexe A on a, en désignant par tr A la trace de A :

$$\text{dét}\,[\exp(A)] = \exp(\text{tr}\,A).{}_*$$

4

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Dans tout le chapitre, E, F, ..., désignent des e.v.n. sur le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes. On appelle *fonction d'une variable réelle* toute fonction de $\mathbb{R}$ vers E. Nous ne considérerons le plus souvent que des applications $I \to E$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans la pratique on se ramène à ce cas par restriction : dire qu'une fonction f est continue (resp. dérivable, etc.) sur I, c'est dire que la restriction de f à I est une application continue (resp. dérivable, etc.).

Tout ce qui a été vu, dans les chapitres 2 et 3, relativement aux fonctions, s'applique bien entendu aux fonctions d'une variable réelle.

Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ *envisagés dans ce chapitre sont supposés d'intérieur non vide.*

L'étude s'étend au cas des fonctions de $\mathbb{R}$ *vers un espace affine normé* (II.**6**.1.*1*, 1°), *ainsi que cela est expliqué dans un contexte plus général au* **8**.1.*1*, 4°.

4.1. DÉRIVÉES

4.1.*1*. Applications dérivables

1° DÉFINITION I. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et $f : I \to E$ une application. On dit que f est dérivable au point a si et seulement si l'application :**

$$I \setminus \{a\} \to E \qquad t \longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

admet une limite lorsque t tend vers a[1]. Lorsqu'elle existe, cette limite, qui est alors unique, est un élément de E qui est appelé dérivée de f au point a, et noté :

$$f'(a) = \lim_{t \to a,\, t \neq a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

REMARQUES. — *a*) Si f est dérivable au point a, toute restriction g de f à un intervalle J tel que $\{a\} \subset J \subset I$ est dérivable au point a et on a : $f'(a) = g'(a)$; mais la réciproque peut être fausse si a est une borne de J sans être une borne de I.

b) Il en résulte que, U étant un ouvert de $\mathbb{R}$, on peut définir la dérivée de $f : U \to E$ en $a \in U$, comme la dérivée en a (si elle existe) de la restriction de f à l'un quelconque des intervalles ouverts J tels que $\{a\} \subset J \subset U$.

---

(1) Il va de soi que, dans le cas $E = \mathbb{R}$, cette limite est *finie* (le cas $E = \overline{\mathbb{R}}$ ne saurait être envisagé !).

DÉFINITION II. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I tel que $I' = I \cap [a, +\infty[$ (resp. $I'' = I \cap]-\infty, a]$) ne soit pas réduit à un point, f une application de I dans E. On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) au point a si et seulement si la restriction de f à I' (resp. I'') est dérivable au point a. La dérivée de la restriction de f au point a s'appelle dérivée à droite (resp. à gauche) de f au point a et se note $f'_d(a)$ [resp. $f'_g(a)$].**

On constate que, lorsqu'elles existent, les « demi-dérivées » $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ sont données par :

$$f'_d(a) = \lim_{t \to a,\, t > a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}; \qquad f'_g(a) = \lim_{t \to a,\, t < a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

et qu'en particulier, si $I = [a, b]$, $a < b$, on a $f'_d(a) = f'(a)$.

On en déduit aussitôt, d'après **2**.2.*2*, 2° :

THÉORÈME. — **Soient $f : I \to E$ une application, a un point intérieur à I. Pour que f soit dérivable au point a, il faut et il suffit que f soit dérivable à droite et à gauche au point a, et que $f'_g(a) = f'_d(a)$. On a alors : $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.**

REMARQUES. — *a*) La dérivabilité à gauche de f au point a équivaut à la dérivabilité à droite de $t \longmapsto f(-t)$ au point $-a$, les valeurs des dérivées correspondantes étant alors opposées. Cette remarque permet de se limiter à l'étude des dérivées à droite.

b) On vérifie aisément que, si l'on remplace la norme de E par une norme équivalente, les notions de dérivabilité et de dérivée sont inchangées.

DÉFINITION III. — **Soit $f : I \to E$ une application. On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I. L'application $f' : t \longmapsto f'(t)$ est alors appelée application dérivée de f.**

On utilise parfois la notation $f'(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)]$, qui sera justifiée ultérieurement.

Cette définition s'étend à la dérivabilité à droite (resp. à gauche).

2° *Propriétés des applications dérivables.* — a) *Si f est dérivable (resp. dérivable à droite) (resp. dérivable à gauche) au point a, alors elle est continue (resp. continue à droite) (resp. continue à gauche) en a.*

Soit :

$$\varepsilon : I \to E \qquad \varepsilon(a) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - f'(a) \quad \text{si} \quad t \neq a.$$

Supposons, que f est dérivable au point a. Alors ε est continue au point a. Comme :

$$\forall\, t \in I \qquad f(t) = f(a) + (t - a)\,[f'(a) + \varepsilon(t)]$$

il en est de même pour f (continuité du produit et de la somme d'applications continues). □

Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) au point a, on a, d'après ce qui précède, la continuité de la restriction de f à I' (resp. I''), qui n'est autre que la continuité à droite (resp. à gauche) de f. □

REMARQUE. — La réciproque est fausse. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = t \sin(1/t)$ pour $t \neq 0$, est continue en 0 mais n'est pas dérivable en ce point.

b) *Soient* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ *un produit d'e.v.n. sur* $\mathbb{K}$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *une application d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans* E. *Alors* f *est dérivable (resp. dérivable à droite) (resp. dérivable à gauche) au point* a *de* I *si et seulement si les* f_i *le sont, et on a alors :* $f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a))$

Résulte immédiatement de **2.2.2**, 4°. □

CONSÉQUENCE. — *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E. *La dérivabilité de l'application*

$$t \longmapsto f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t) e_k$$

équivaut à celle des f_k ; *lorsqu'elle est acquise, on a :*

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(t) e_k$$

En particulier $f : I \to \mathbb{C}$, (I : intervalle de $\mathbb{R}$), *est dérivable si, et seulement si* $\mathfrak{Re}(f)$ *et* $\mathfrak{Im}(f)$ *sont dérivables.*

EXEMPLE. — *Dérivée d'une matrice.* — Soit $t \longmapsto M(t)$ une application de I dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, espace vectoriel des matrices de type (n, p) sur $\mathbb{K}$. Posons $M(t) = (\alpha_{ij}(t))_{i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_p}$, ce qui équivaut à $M(t) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}(t) M_{ij}$ (décomposition d'une matrice dans la base canonique). M est donc dérivable si et seulement si chacun des coefficients l'est, et on a alors :

$$M'(t) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}'(t) M_{i,j},$$

soit :

$$M'(t) = [\alpha_{ij}'(t)]_{i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_p}.$$

c) *Une application* $f : I \to E$ *est dérivable sur* I *si et seulement si sa restriction à tout segment* $[a, b] \subset I$ *est dérivable.*

La vérification est aisée.

4.1.2. Opérations sur les applications dérivables

1° ***Linéarité de la dérivation.*** — THÉORÈME. — **Soient** I **un intervalle de** $\mathbb{R}$, **et** $a \in I$. **L'ensemble** $\mathfrak{D}_a(I, E)$ [resp. $\mathfrak{D}_a^+(I, E)$] [resp. $\mathfrak{D}_a^-(I, E)$] **des applications de** I **dans** E, **dérivables (resp. dérivables à droite) (resp. dérivables à gauche) au point** a, **est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel** E^I, **et l'application** $f \longmapsto f'(a)$ **de** $\mathfrak{D}_a(I, E)$ **dans** E (resp. de $\mathfrak{D}_a^+(I, E)$ dans E) (resp. de $\mathfrak{D}_a^-(I, E)$ dans E) **est linéaire.**

— La présence de la fonction nulle fait qu'il s'agit d'un ensemble non vide.

— Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(f, g) \in [\mathfrak{D}_a(I, E)]^2$. On a, pour $t \in I\backslash\{a\}$:

$$\frac{(\lambda f+\mu g)(t)-(\lambda f+\mu g)(a)}{t-a} = \lambda \frac{f(t)-f(a)}{t-a} + \mu \frac{g(t)-g(a)}{t-a}$$

Il suffit alors d'appliquer **3.1.4**, 2°. □

COROLLAIRE. — **Si f et g sont dérivables sur I, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ on a :**

$$(\lambda f+\mu g)' = \lambda f'+\mu g'.$$

2° THÉORÈME. — **Soient $E_1, \ldots, E_n$, F des e.v.n. sur $\mathbb{K}$, et u une application n-linéaire continue de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et pout tout $i \in \mathbb{N}_n$ une application f_i de I dans E_i. On désigne par g l'application $t \longmapsto u[f_1(t), \ldots, f_n(t)]$ de I dans F. Si chaque f_i est dérivable au point $a \in I$, alors g est dérivable au point a, et :**

$$g'(a) = \sum_{i=1}^{n} u[f_1(a), \ldots, f_{i-1}(a), f_i'(a), f_{i+1}(a), \ldots, f_n(a)]$$

On a, pour $t \in I\backslash\{a\}$, en utilisant la n-linéarité de u :

$$\frac{g(t)-g(a)}{t-a} = \sum_{i=1}^{n} u\left[f_1(a), \ldots, f_{i-1}(a), \frac{f_i(t)-f_i(a)}{t-a}, f_{i+1}(t), \ldots, f_n(t)\right]$$

Le théorème est alors une conséquence du n° **3.1.4**, 2°. □

EXEMPLES. — *a*) Ce théorème est utilisé pour tous les produits usuels déjà rencontrés (*cf.* chapitre 3). En particulier, si $f_1, \ldots, f_n$ sont des applications dérivables d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, on a :

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n$$

Ainsi, l'application $t \longmapsto t^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable, et on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^n) = nt^{n-1}.$$

Compte tenu du 1°, et de l'étude de la dérivation d'une application d'un intervalle réel dans $\mathbb{C}$, on en déduit que, $a_0, \ldots, a_n$ étant des nombres complexes quelconques, l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad t \longmapsto a_0+a_1 t+\ldots+a_n t^n$$

admet, en tout $t \in \mathbb{R}$, la dérivée $f'(t) = a_1+2a_2 t+\ldots+na_n t^{n-1}$. Ainsi, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la dérivée de la fonction de variable réelle $t \longmapsto P(t)$ est la fonction $t \longmapsto P'(t)$, où P' est le polynôme dérivé de P, au sens de la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

b) Le lecteur énoncera des théorèmes relatifs à la dérivation d'un produit scalaire, mixte ou vectoriel dans un espace euclidien, éventuellement orienté (tenir compte de l'ordre des facteurs dans les deux derniers cas).

c) Si λ (resp. v) sont des applications dérivables de I dans $\mathbb{K}$ (resp. E) l'application $\lambda v : t \longmapsto \lambda(t)\, v(t)$ est dérivable et :

$$(\lambda v)'(t) = \lambda'(t)\, v(t) + \lambda(t)\, v'(t).$$

d) Soit $M(t)$ la matrice carrée $[\alpha_{ij}(t)]_{i \in \mathbb{N}_n,\, j \in \mathbb{N}_n}$, où les α_{ij} sont des applications de I dans $\mathbb{K}$, dérivables au point $a \in I$.

L'application $t \longmapsto \det M(t)$ est alors dérivable au point a, et :

$$(\det M)'(a) = \sum_{j=1}^{n} \det M_j(a),$$

où $M_j(a)$ désigne la matrice obtenue en remplaçant, dans $M(a)$, les éléments de la j-ième colonne par leurs dérivées $\alpha'_{ij}(a)$ $(i \in \mathbb{N}_n)$, (*cf.* I. 11.2.2, 3°).

Remarque. — Ce théorème s'étend sans difficulté aux dérivées à droite ou à gauche.

3° ***Dérivation des fonctions composées.*** — Théorème. — **Soient φ une application d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$, f une application d'un intervalle réel J dans un e.v.n. E, J contenant $\varphi(I)$, et a un point de I. Si φ est dérivable en a, et f dérivable en $\varphi(a)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) \cdot f'[\varphi(a)]$.**

Considérons l'application $g : J \to E$ définie par :

$$g(u) = \frac{f(u) - f[\varphi(a)]}{u - \varphi(a)} \quad \text{pour} \quad u \neq \varphi(a), \quad \text{et} \quad g[\varphi(a)] = f'[\varphi(a)].$$

g est continue au point $\varphi(a)$. Pour tout $t \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$\frac{(f \circ \varphi)(t) - (f \circ \varphi)(a)}{t - a} = \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a}\, g[\varphi(t)]$$

(On étudiera successivement les cas $\varphi(t) - \varphi(a) \neq 0$ et $\varphi(t) - \varphi(a) = 0$).

De la continuité de g en $\varphi(a)$, et de la dérivabilité de φ en a, on déduit :

$$\lim_{t \to a,\, t \neq a} \frac{(f \circ \varphi)(t) - (f \circ \varphi)(a)}{t - a} = \varphi'(a) f'[\varphi(a)] \qquad \square$$

Corollaire. — **Soient φ une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$, et f une application dérivable d'un intervalle $J \supset \varphi(I)$ dans E. Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et**

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi).$$

($\varphi(I)$ est un intervalle car φ est continue.)

Exemples. — *a*) Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, dérivable en $a \in I$ tel que $\varphi(a) \neq 0$. Il existe un intervalle I' de $\mathbb{R}$ tel que $\{a\} \subset I' \subset I$ sur lequel φ ne prend pas la valeur 0.

L'application $t \to \mathrm{Log}\, |\varphi(t)|$ de I' dans $\mathbb{R}$ admet au point a la dérivée $\varphi'(a)/\varphi(a)$, (cf. 5°) (Ici f est $\mathrm{Log}\, |.|$).

b) Soient u et v des applications dérivables d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$.

Alors l'application u^v : $I \to \mathbb{R}$ $\quad t \to (u(t))^{v(t)}$

est dérivable et : $(u^v)' = u^v . (v' \,\mathrm{Log}\, u + u'v/u)$.

(Ici f est exp., φ est $v \,\mathrm{Log}\, u$).

REMARQUE. — On se gardera d'étendre le théorème de dérivation des fonctions composées aux dérivées à droite (ou à gauche). Ainsi, soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = -t$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(u) = |u|$. On a : $\varphi'_d(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$ et $(f \circ \varphi)'_d(0) = 1$. Le lecteur pourra étudier ce problème de plus près dans l'exercice n° 4.24.

4° *Dérivée d'un quotient.* — THÉORÈME. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une application et a un point de I tel que $f(a) \neq 0$. Si f est dérivable au point a, il existe un intervalle J, vérifiant $\{a\} \subset J \subset I$, et tel que f ne s'annule pas sur J. Alors, si g désigne l'application $J \to \mathbb{K}$ définie par $g(t) = 1/f(t)$, g est dérivable au point a et : $g'(a) = -f'(a)/(f(a))^2$.**

L'existence de J tient à la continuité de f au point a et à la non-nullité de $f(a)$ (Il s'agit d'un voisinage de a pour la topologie induite sur I). D'autre part, pour $t \in J \backslash \{a\}$:

$$\frac{g(t)-g(a)}{t-a} = -\frac{1}{f(t)f(a)}\,\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

d'où le résultat, en appliquant les théorèmes sur les opérations sur les limites. □

EXEMPLES. — *a*) Soient α un complexe non réel, et $n \in \mathbb{N}^*$. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ $t \longmapsto \dfrac{1}{(t-\alpha)^n}$ est dérivable, sa dérivée étant $t \longmapsto \dfrac{-n}{(t-\alpha)^{n+1}}$.

b) Plus généralement, soit $t \longmapsto F(t)$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ associée à la fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$. Elle est dérivable en tout point a qui n'est pas un pôle, sa dérivée étant alors $F'(a)$, où F' désigne la fraction rationnelle dérivée introduite en algèbre.

5° **Dérivée logarithmique.** — DÉFINITION. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable en $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$. Le réel $f'(a)/f(a)$ est appelé dérivée logarithmique de f au point a.**

Cette dénomination s'explique par le fait que la fonction composée $t \longmapsto \ln|f(t)|$, où ln désigne le logarithme népérien, admet alors $f'(a)/f(a)$ pour dérivée au point a.

THÉORÈME. — **Soient u et v des applications dérivables d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$, ne prenant pas la valeur 0. Alors :**

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}; \qquad \frac{(u^n)'}{u^n} = n\,\frac{u'}{u}\ (n \in \mathbb{N}^*); \qquad \frac{(u/v)'}{u/v} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

Si u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(u^\alpha)'/u^\alpha = \alpha u'/u.$$

Vérification aisée. □

4.1.3. Dérivées d'ordre supérieur

1° DÉFINITION I. — **Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans E. On définit par récurrence l'application dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$:**

Pour $n = 0$, on pose $f^{(0)} = f$. — Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 1$. On suppose que

l'on dispose de $f^{(n-1)} : I \to E$. On dit que f admet une dérivée n-ième en a si et seulement si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a, et on note : $(f^{(n-1)})'(a) = f^{(n)}(a)$. On dit enfin que f admet une dérivée d'ordre n sur I si et seulement si $f^{(n)}(a)$ est défini en tout point $a \in I$.

On utilise aussi la notation $\frac{d^n}{dt^n}(f(t))$ pour $f^{(n)}(t)$.

EXEMPLE. — On vérifie, par récurrence,

$$\frac{d^n}{dt^n}(\sin t) = \sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{d^n}{dt^n}(\cos t) = \cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right).$$

REMARQUES. — *a*) Plus généralement, on dira qu'une application (ou une fonction) f admet une dérivée n-ième en a s'il existe un intervalle J, voisinage de a, tel que la restriction de f à J admette une dérivée n-ième en a, (autrement dit il n'est pas nécessaire d'exiger l'existence de $f^{(n-1)}$ sur I tout entier).

b) Notons que l'existence de $f^{(n)}$ sur I exige la continuité de $f^{(n-1)}$ sur I.

DÉFINITION II. — **On dit que $f : I \to E$ est de classe C^n si et seulement si $f^{(n)} : I \to E$ existe et est continue.**

Si f est de classe C^n, elle est de classe C^k, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$.

DÉFINITION III. — **On dit que f est de classe C^∞ si et seulement si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

2° ***Formule de Leibniz.*** — THÉORÈME. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, E, F, G des $\mathbb{K}$-e.v.n., f (resp. g) une application de I dans E (resp. F), enfin $(x, y) \longmapsto x \top y$ un produit de $E \times F$ dans G. Si f et g admettent des dérivées n-ièmes au point a de I, l'application de I dans $G : t \longmapsto f(t) \top g(t)$, notée $f \top g$, admet une dérivée n-ième au point a, et :**

$$(f \top g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) \top g^{(n-k)}(a).$$

La démonstration se fait par récurrence, en utilisant la dérivation d'une application bilinéaire continue et la formule $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$. □

COROLLAIRE. — **Le produit de deux applications de classe C^n est de classe C^n.**

3° THÉORÈME. — **Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application telle que $\varphi(I) \subset J$, $f : J \to E$ une application. Si φ est de classe C^n sur I et f de classe C^n sur J, alors $f \circ \varphi$ est de classe C^n sur I.**

Démonstration par récurrence. Le théorème est vrai pour $n = 0$. Supposons le vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ ($n \geqslant 1$) et soient φ et f de classe C^n. Alors φ', f' et φ sont de classe C^{n-1}. Donc $f' \circ \varphi$ est de classe C^{n-1} (hypothèse de récurrence), ainsi que $\varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$ (formule de Leibniz). Donc

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi) \qquad \square$$

est de classe C^{n-1}, ce qui exige que $f \circ \varphi$ soit de classe C^n.

4° ***Calcul des dérivées n-ièmes.*** — Le calcul explicite d'une dérivée n-ième en fonction de n n'est pas toujours aisé. En pratique on s'efforce de mettre la fonction à dériver sous une forme commode, en s'inspirant des méthodes qui seront étudiées pour le calcul des primitives (chapitre 7).

EXEMPLES. — *a*) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On vérifie aisément par récurrence que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (distinct de α si $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{1}{t-\alpha}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(t-\alpha)^{n+1}}.$$

b) Pour calculer la dérivée n-ième d'une fraction rationnelle, on décompose celle-ci en éléments simples sur le corps $\mathbb{C}$. Ainsi, de :

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right)$$

on déduit :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left(\frac{1}{(t-i)^{n+1}} - \frac{1}{(t+i)^{n+1}}\right)$$

qui s'écrit aussi :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = \frac{P_n(t)}{(t^2+1)^{n+1}}$$

où $P_n \in \mathbb{R}[X]$ est le polynôme $(-1)^n n! \sum\limits_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} X^{n-2k}$.

5° ***Fonctions régulières par morceaux.*** — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers un $\mathbb{K}$-e.v.n. E, définie sur D.

DÉFINITION I. — **On dit que f est constante (resp. affine) par morceaux sur un segment $[a, b] \subset D$, $a < b$, si et seulement s'il existe une famille finie strictement croissante ($a_0 = a$, a_1, ..., $a_n = b$) de réels telle que la restriction de f à chacun des intervalles ouverts $]a_{i-1}, a[$, $i \in \mathbb{N}_n$, soit constante (resp. affine).**

Les applications constantes par morceaux sur un segment sont appelées **applications en escalier** (cf. **6**.1.*2*).

DÉFINITION II. — **Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit que f est C^k par morceaux sur un segment $[a, b] \subset D$, $a < b$, si et seulement s'il existe une famille finie strictement croissante ($a_0 = a$, a_1, ..., $a_n = b$) de réels telle que la restriction de f à chacun des $]a_{i-1}, a_i[$, $i \in \mathbb{N}_n$, soit prolongeable en une fonction de classe C^k sur $[a_{i-1}, a_i]$.**

DÉFINITION III. — **On dit que f est constante (resp. affine) (resp. C^k) par morceaux sur un intervalle quelconque $I \subset D$ si et seulement si la restriction de f à tout segment inclus dans I est constante (resp. affine) (resp. C^k) par morceaux.**

REMARQUES. — *a*) Toute fonction en escalier est affine par morceaux.

b) Toute fonction affine par morceaux est C^∞ par morceaux.

c) Toute fonction C^k par morceaux sur un segment est bornée, et, a fortiori toute fonction constante (resp. affine) par morceaux sur un segment est bornée.

4.2. THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS FORMULES DE TAYLOR

4.2.*1*. Théorème des accroissements finis

1° THÉORÈME. — **Soient a et b deux réels tels que $a < b$, $f : [a, b] \to E$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des applications continues admettant en tout point de $]a, b[$ des dérivées à droite, telles que :**

$$\forall t \in]a, b[\qquad \|f'_d(t)\| \leqslant g'_d(t).$$

Alors on a : $$\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a)$$

— Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, et φ_ε l'application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, manifestement continue :

$$t \longmapsto \|f(t)-f(a)\|-g(t)+g(a)-\varepsilon(t-a).$$

Désignons par E_ε l'ensemble $\{t \in [a, b] \mid \varphi_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon\}$.

On a $E_\varepsilon \neq \varnothing$ (car $a \in E_\varepsilon$). Il existe donc $c = \sup E_\varepsilon$, avec $c \in [a, b]$.

Comme φ_ε est continue, et $\varphi_\varepsilon(a) = 0$, il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon$ pour $t \in [a, a+h[$, ce qui exige $c > a$.

La continuité de φ_ε montre également que E_ε, image réciproque du fermé $]-\infty, \varepsilon]$ de $\mathbb{R}$, est un fermé de $[a, b]$ et donc un fermé de $\mathbb{R}$. Il en résulte :

$$c \in E_\varepsilon.$$

— Supposons alors $c \neq b$, et donc $c \in]a, b[$. La dérivabilité à droite en c de f et g permet alors de trouver $t \in]c, b]$ vérifiant simultanément :

$$\left\|\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\right\| \leqslant \|f'_d(c)\| + \varepsilon/2 \tag{1}$$

$$g'_d(c) \leqslant \frac{g(t)-g(c)}{t-c} + \varepsilon/2. \tag{2}$$

De (1) et (2) on déduit, en utilisant $t > c$:

$$\|f(t)-f(c)\| \leqslant g(t)-g(c)+\varepsilon(t-c). \tag{3}$$

Or, d'après $c \in E_\varepsilon$:

$$\|f(c)-f(a)\| \leqslant g(c)-g(a)+\varepsilon(c-a)+\varepsilon. \tag{4}$$

Par addition de (3) et (4), compte tenu de l'inégalité triangulaire :

$$\|f(t)-f(a)\| \leqslant g(t)-g(a)+\varepsilon(t-a)+\varepsilon.$$

D'où $t \in E_\varepsilon$, ce qui contredit $c < t$.

L'hypothèse $c \neq b$ est donc absurde, et $c = b$. Il en résulte :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad \|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a)+\varepsilon(b-a)+\varepsilon$$

et : $$\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a).$$ □

REMARQUES. — *a*) On notera bien l'hypothèse $a < b$; l'inégalité reste vraie si $a = b$, mais pas si $a > b$.

b) On peut remplacer *dérivée à droite* par *dérivée à gauche* (4.1.*1*, 1°, remarque) et, naturellement, *par dérivée*.

COROLLAIRE. — **Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers E, définie et continue sur $[a, b]$, dérivable à droite sur $]a, b[$, et telle que f'_d soit bornée sur $]a, b[$. Alors :**

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant (b-a) \sup_{t \in]a, b[} \|f'_d(t)\|.$$

On applique le théorème, en prenant $g(t) = t \sup_{\tau \in]a, b[} \|f'_d(\tau)\|$. □

2° *Applications.* — THÉORÈME I. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \to E$ une application continue sur I et dérivable à droite sur $\mathring{I}$. Alors :**

i) **f est k-lipschitzienne sur I si et seulement si :**

$$\forall t \in \mathring{I} \qquad \|f'_d(t)\| \leqslant k.$$

ii) **f est constante sur I si et seulement si :** $\forall t \in \mathring{I} \quad f'_d(t) = 0.$

i) — Supposons f k-lipschitzienne sur I. Alors, pour $t \in \mathring{I}$ et $h \in \mathbb{R}^*_+$ vérifiant $t+h \in I$:

$$\|f(t+h) - f(t)\| \leqslant k h.$$

D'où :
$$\|f'_d(t)\| = \lim_{h \to 0,\, h>0} \left\|\frac{f(t+h) - f(t)}{h}\right\| \leqslant k.$$

— Inversement, supposons : $\forall t \in \mathring{I} \quad \|f'_d(t)\| \leqslant k$. Soit $(t, t') \in I^2$, tel que : $t < t'$; on peut appliquer le corollaire du 1° :

$$\|f(t') - f(t)\| \leqslant k\,(t'-t).$$

D'où : $\forall (t, t') \in I^2 \qquad \|f(t) - f(t')\| \leqslant k\,|t-t'|$. □

ii) Il suffit de remarquer que f est constante sur I si et seulement si elle est k-lipschitzienne avec $k = 0$. □

THÉORÈME II. — **Soient $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach, et $f:]a, b[\to E$ une application continue et dérivable à droite, telle que f'_d admette au point a une limite à droite l. Alors f est prolongeable en une application $\hat{f}: [a, b[\to E$ continue et dérivable à droite ; on a $\hat{f}'_d(a) = l$.**

— Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ vérifiant $a+\alpha < b$ et

$$\forall t \in]a, a+\alpha[\qquad \|f'_d(t) - l\| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Donc :
$$\forall t \in]a, a+\alpha[\qquad \|f'_d(t)\| \leqslant \|l\| + \varepsilon.$$

Ainsi f est lipschitzienne sur $]a, a+\alpha[$. Comme E est complet, on peut appliquer le théorème de prolongement des applications uniformément continues (**2.4.**2, 6°) : on pose $\hat{f}(a) = \lim_{t \to a,\, t>a} f(t)$.

— Ainsi $\hat{f}$ est continue sur $[a, t]$, pour tout $t \in]a, a+\alpha[$. Il résulte de (1) et du corollaire du 1°, appliqué à $u \longmapsto \hat{f}(u) - ul$:

$$\|\hat{f}(t) - \hat{f}(a) - (t-a)\,l\| \leqslant \varepsilon(t-a)$$

soit, puisque $t-a > 0$:
$$\left\|\frac{\hat{f}(t) - \hat{f}(a)}{t-a} - l\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \in]a, a+\alpha[\quad \left\| \frac{\hat{f}(t)-\hat{f}(a)}{t-a} - l \right\| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

REMARQUES. — *a*) Le théorème reste vrai si on remplace *dérivée à droite* par *dérivée à gauche, limite à droite en a par limite à gauche en b et* $[a, b[$ par $]a, b]$.

b) Si f est continue et dérivable sur $I \backslash \{a\}$, et s'il existe $\lim_{t \to a,\, t \neq a} f'(t)$, *f n'est pas nécessairement* prolongeable par continuité en a. (Penser à la partie entière : $t \longmapsto E(t)$.)

c) En revanche, **si f est continue sur l'intervalle I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et s'il existe** $\lim_{t \to a, t \neq a} f'(t)$, **alors f est dérivable en a et** $f'(a) = \lim_{t \to a, t \neq a} f'(t)$.

(Le lecteur reprendra la deuxième partie de la démonstration précédente, et constatera que dans ce cas l'hypothèse de complétude de E est inutile).

EXEMPLE. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(t) = \exp(-1/t^2) \text{ si } t \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On vérifie, par récurrence sur n, qu'elle admet en tout $t \in \mathbb{R}^*$ une dérivée d'ordre n de la forme :

$$f^{(n)}(t) = t^{-3n} P_n(t) \exp(-1/t^2), \qquad P_n \in \mathbb{R}[X].$$

En utilisant ($\forall m \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to +\infty} x^m e^{-x} = 0$) on en déduit (en notant $f = f^{(0)}$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \lim_{t \to 0,\, t \neq 0} f^{(n)}(t) = 0 \tag{1}$$

Pour $n = 0$, (1) montre que f est continue au point 0, et donc sur $\mathbb{R}$.

En utilisant (1) pour $n = 1$, on déduit alors de la remarque *c*) que $f'(0)$ existe et vaut 0, et donc que f' est continue sur $\mathbb{R}$.

Par récurrence sur n, on démontre enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$ existe et vaut 0, et donc que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4.2.2. Formules de Taylor

1° ***L'inégalité de Taylor-Lagrange.*** — THÉORÈME. — **Soient n un entier positif, $S = [a, b]$ (resp. $[b, a]$) un segment de $\mathbb{R}$, E un e.v.n., $f : S \to E$ une application de classe C^n admettant une dérivée d'ordre $n+1$ en tout point de $\mathring{S}$. On suppose qu'il existe un réel M vérifiant :**

$$\forall t \in \mathring{S} \qquad \|f^{(n+1)}(t)\| \leqslant M.$$

Alors on a :

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit φ_n la fonction définie par :

$$\varphi_n(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)$$

φ_n est continue sur S, dérivable sur $\mathring{S}$, et $\varphi_n'(t) = -\dfrac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$.

Posons : $g(t) = -M \dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ lorsque $a < b$, et $g(t) = M \dfrac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}$ lorsque $a > b$. Dans tous les cas :

$$\forall t \in \mathring{S} \qquad \|\varphi_n'(t)\| \leqslant g'(t)$$

et, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\|\varphi_n(b)-\varphi_n(a)\| \leqslant M\,\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad \square$$

REMARQUES. — *a*) Pour $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements fini (ici $\{i \in \mathbb{N} | 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est vide).

b) Un simple changement de notation ($b = a + h$) donne la formule de Taylor-Lagrange sous la forme :

$$\|f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a)\| \leqslant M\,\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2° ***Formule de Taylor-Young.*** — THÉORÈME. — **Soient n un entier strictement positif, et f une fonction de $\mathbb{R}$ vers E admettant une dérivée n-ième en $a \in \mathbb{R}$. Alors :**

$$\lim_{t\to a,\, t\neq a} \frac{1}{(t-a)^n}\left[f(t)-f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right] = 0.$$

Remarquons d'abord que l'existence d'une dérivée n-ième en a implique l'existence d'un intervalle I, contenant a, sur lequel f est définie et admet des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, $f^{(n-1)}$ étant dérivable en a.

La démonstration se fait par récurrence sur l'entier n.

— Pour $n = 1$, considérons f dérivable en a ; on a :

$$\lim_{t\to a,\, t\neq a}\left[\frac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a)\right] = 0$$

d'où
$$\lim_{t\to a,\, t\neq a} \frac{1}{t-a}[f(t)-f(a)-(t-a)f'(a)] = 0.$$

— Supposons le théorème démontré jusqu'à l'ordre $n-1$, et soit f admettant une dérivée d'ordre n en a ($n \geqslant 2$). f' admet alors une dérivée $(n-1)$-ième en a, et, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\lim_{t\to a,\, t\neq a} \frac{1}{(t-a)^{n-1}}\left[f'(t)-f'(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a)\right] = 0. \qquad (1)$$

Posons, pour $t \in I$,
$$R(t) = f(t)-f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après (1) il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall\, t \in I\backslash\{a\} \qquad |t-a| < \alpha \implies \frac{1}{|t-a|^{n-1}}\|R'(t)\| \leqslant \varepsilon$$

soit encore : $\forall\, t \in I \qquad |t-a| < \alpha \implies \|R'(t)\| \leqslant \varepsilon\,|t-a|^{n-1}$

Considérons alors la fonction g définie par $g(t) = \dfrac{\varepsilon}{n}|t-a|^{n-1}(t-a)$.

On vérifie que, pour $t \neq a$, et $|t-a| < \alpha$: $\|R'(t)\| \leqslant g'(t)$.

On a, par application du théorème des accroissements finis sur $[a, t]$ ou sur $[t, a]$:

$$\|R(t)\| = \|R(t) - R(a)\| \leqslant |g(t) - g(a)| = |g(t)|.$$

et ainsi :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, t \in I\backslash\{a\} \qquad |t-a| < \alpha \implies \frac{1}{|t-a|^n}\|R(t)\| \leqslant \varepsilon/n. \;\square$$

REMARQUES. — *a*) Il est souvent commode, dans la formule de Taylor-Young, de poser :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{(t-a)^n} R(t) \quad \text{pour} \quad t \neq a \quad \text{et} \quad \varepsilon(a) = 0.$$

On a alors :

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) + (t-a)^n \varepsilon(t)$$

où ε est une fonction continue au point a.

b) On notera bien la différence de nature des deux formules de Taylor : la formule de Taylor-Lagrange a un caractère *global* tandis que celle de Taylor-Young a un caractère *local* (comportement de f au *voisinage* de a).

4.3. FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

4.3.*1*. Applications monotones

$\mathbb{R}$ étant ordonné, on peut reprendre les définitions I.1.3.*4*, 3° et poser :

1° DÉFINITION. — **Soit f une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; f est dite croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si :**

$$\forall\, (x, y) \in D^2 \qquad x < y \implies f(x) \leqslant f(y)$$
$$(\textbf{resp.}\ \forall\, (x, y) \in D^2 \qquad x < y \implies f(x) < f(y))$$

f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si $-f$ est croissante (resp. strictement croissante).

Enfin f est dite monotone (resp. strictement monotone) si et seulement si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

2° ***Propriétés.*** — D étant une partie de $\mathbb{R}$, nous désignerons par :

— $\mathcal{M}(D)$ (resp. $\mathcal{M}_+(D)$) (resp. $\mathcal{M}_-(D)$) l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$ monotones (resp. croissantes) (resp. décroissantes).

Le lecteur est alors invité à vérifier les propriétés suivantes :

a) *Une application monotone f est injective si et seulement si elle est strictement monotone ; elle induit alors une bijection de D sur $f(D)$ dont la bijection*

réciproque est strictement monotone (croissante ou décroissante selon que f est croissante ou décroissante).

b) Si $f \in \mathcal{M}_+(D)$ (resp. $f \in \mathcal{M}_-(D)$) et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $\lambda f \in \mathcal{M}_+(D)$ (resp. $\lambda f \in \mathcal{M}_-(D)$).

c) $\mathcal{M}_+(D) + \mathcal{M}_+(D) \subset \mathcal{M}_+(D)$ et $\mathcal{M}_-(D) + \mathcal{M}_-(D) \subset \mathcal{M}_-(D)$.

d) Si $(f, g) \in (\mathcal{M}_+(D))^2$ et si $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, alors $f \cdot g \in \mathcal{M}_+(D)$.

e) L'application composée de deux applications croissantes (resp. décroissantes) est croissante, et la composée d'une application croissante et d'une application décroissante est décroissante.

f) Si $f \in \mathcal{M}_+(D)$ et si $(\forall t \in D \quad f(t) > 0)$, alors $1/f \in \mathcal{M}_-(D)$.

REMARQUE. — L'ensemble des applications monotones sur D n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^D$. Le lecteur trouvera à l'exercice n° 4.54 une étude du sous-espace de $\mathbb{R}^D$ engendré par $\mathcal{M}(D)$. Les éléments de ce sous-espace sont appelés *applications à variation bornée.*

3° ***Théorème de la limite monotone.*** — THÉORÈME. — **Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ une application monotone, a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que a soit adhérent à $D \cap \,]a, +\infty[$ (resp. $D \cap \,]-\infty, a[$). Alors f admet une limite, finie ou infinie[1], à droite (resp. à gauche) au point a.**

Supposons pour fixer les idées, f croissante et a adhérent à $D \cap \,]a, +\infty[$. Soit

$$l = \inf_{t \in D \cap]a, +\infty[} f(t) \qquad (l \in \overline{\mathbb{R}}).$$

Par définition de la borne inférieure, pour tout $l' \in \,]l, +\infty]$ on peut trouver $t_0 \in D \cap \,]a, +\infty[$ tel que : $l \leqslant f(t_0) < l'$.

On a alors, pour tout $t \in D \cap \,]a, t_0[$, $l \leqslant f(t) \leqslant f(t_0) < l'$.

Il en résulte
$$l = \lim_{t \to a,\, t > a} f(t)$$ □

Rappelons que $\lim_{t \to a,\, t > a} f(t)$ est noté $f(a+)$ et $\lim_{t \to a,\, t < a} f(t)$, $f(a-)$.

COROLLAIRE I. — **Soient $f: D \to \mathbb{R}$ croissante et a un point adhérent à $D \cap \,]a, +\infty[$. Alors f admet une limite finie[2] à droite, au point a si et seulement si f est minorée sur $D \cap \,]a, +\infty[$.**

D'après le théorème, $\lim_{t \to a,\, t > a} f(t) = l = \inf_{t \in D \cap]a, +\infty[} f(t)$, et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. De $D \cap \,]a, +\infty[\, \neq \emptyset$ (son adhérence contient a) on déduit $l \neq +\infty$. Donc l est fini si et seulement si : $-\infty < \inf_{t \in D \cap]a, +\infty[} f(t)$, ou encore si et seulement si f est minorée sur $D \cap \,]a, +\infty[$ □

---

(1) On dit de $f: D \to \mathbb{R}$ qu'elle admet une limite finie ou infinie, si et seulement si l'application $f: D \to \overline{\mathbb{R}}$, de même graphe que f, admet une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

(2) Le mot *finie* est en principe superflu quand il s'agit d'une application de D dans $\mathbb{R}$. On le rajoute lorsqu'il y a risque d'ambiguïté.

Le lecteur est invité à énoncer les trois corollaires analogues, suivant que f est croissante ou décroissante, pour une limite à droite ou à gauche.

COROLLAIRE II. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ une application monotone et a un point de I. Si $a \neq \sup I$, f admet une limite à droite (finie) $f(a+)$ et si $a \neq \inf I$, f admet une limite à gauche (finie) $f(a-)$.**

En effet $f(a)$ est un majorant (ou un minorant) de f sur $D \cap]a, +\infty[$ (ou sur $D \cap]-\infty, a[$).

On notera que pour $a \in \mathring{I}$:

— Si f est croissante $\quad f(a-) \leqslant f(a) \leqslant f(a+)$

— Si f est décroissante $\quad f(a+) \leqslant f(a) \leqslant f(a-)$

4.3.2. Monotonie et continuité

1° THÉORÈME. — **Soit f une application monotone d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$. L'ensemble E des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.**

Pour fixer les idées, supposons f croissante. I pouvant être considéré comme réunion dénombrable de segments, on peut se limiter au cas où I est un segment $[a, b]$.

Considérons alors la fonction σ (« *fonction des sauts* ») définie sur $[a, b]$ par : $\sigma(t) = f(t+) - f(t-)$ si $t \in]a, b[$, $\sigma(a) = f(a+) - f(a)$ et

$$\sigma(b) = f(b) - f(b-).$$

On a : $\forall t \in [a, b]\ \sigma(t) \geqslant 0$ et $E = \{t \in [a, b] \mid \sigma(t) > 0\}$.

Posons $E_n = \{t \in [a, b] \mid \sigma(t) \geqslant 1/(n+1)\}$. Soit $(t_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille strictement croissante de points de $[a, b]$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{p} \sigma(t_k) \leqslant f(b) - f(a). \tag{1}$$

En effet, si $(\xi_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille de réels vérifiant

$\xi_i \in]t_i, t_{i+1}[$ pour $i \in \mathbb{N}_{p-1}$,

$\xi_0 \in]a, t_1[$ si $a \neq t_1$ et $\xi_0 = a$ si $a = t_1$,

$\xi_p \in]t_p, b[$ si $b \neq t_p$ et $\xi_p = b$ si $b = t_p$.

on peut alors écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}_p$:

$$\sigma(t_k) \leqslant f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{p} \sigma(t_k) \leqslant f(\xi_p) - f(\xi_1) \leqslant f(b) - f(a).$$

On en déduit que l'ensemble E_n est fini ; en effet si $t_1, \ldots, t_p$ sont des éléments de E_n, (1) donne : $p \leqslant (n+1)\,(f(b) - f(a))$.

Enfin si on remarque $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$, on constate que E est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis (I. **1**.4.*3*, 2°). □

AUTRE DÉMONSTRATION. — Supposons que f est croissante et introduisons la fonction de sauts σ, définie comme ci-dessus, a et b étant ici les extrêmités éventuelles de I.

Construisons $r : E \to \mathbb{R}$ en prenant (axiome au choix) pour $r(t)$, $t \in E$, un rationnel vérifiant :

$$r(t) \in]f(t-), f(t+)[\quad \text{si} \quad t \in \mathring{I}$$

et, s'il y a lieu :

$$r(a) \in]f(a), f(a+)[\,; \qquad r(b) \in]f(b-), f(b)[.$$

r étant manifestement injective, E est au plus dénombrable.

2° *Continuité d'une fonction monotone.* — THÉORÈME. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone. f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.**

— *La condition est nécessaire.* — Résulte de **2**.6.*2*, 2°.

— *La condition est suffisante.* — Supposons que $f(I)$ est un intervalle, et raisonnons dans le cas où f est croissante. Soit $t_0 \in I$. Si f n'était pas continue en t_0, on aurait $f(t_0-) < f(t_0)$ ou $f(t_0) < f(t_0+)$. Supposons $f(t_0) < f(t_0+)$ pour fixer les idées. L'existence de $f(t_0+)$ suppose l'existence de

$$t \in I \cap]t_0, +\infty[.$$

Pour un tel t :

$$f(t_0) < f(t_0+) \leqslant f(t).$$

Soit alors $x \in]f(t_0), f(t_0+)[$, ce qui implique $x \in]f(t_0), f(t)[$; $f(I)$ étant un intervalle, on a : $x \in f(I)$. Il existe donc $t_1 \in I$ tel que $x = f(t_1)$.

Si on avait $t_1 \leqslant t_0$, on aurait $x \leqslant f(t_0)$; de même si on avait $t_1 > t_0$, on aurait $x \geqslant f(t_0+)$. Dans les deux cas il y aurait une contradiction. □

REMARQUE. — La condition reste suffisante même si I n'est pas un intervalle.

COROLLAIRE : THÉORÈME DES FONCTIONS RÉCIPROQUES. — **Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J.**

J est un intervalle car f est continue. Strictement monotone, f induit une bijection — notée encore f — de I sur J. $f^{-1} : J \to I$ est alors strictement monotone, et son image $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle ; f^{-1} est ainsi continue. □

3° *Homéomorphismes d'un intervalle sur un autre.* — THÉORÈME. — **Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, et f un homéomorphisme de I sur J. Alors f est strictement monotone.**

— Montrons d'abord que si $(a, b, c) \in I^3$ vérifie $a < b < c$, $f(b)$ est entre $f(a)$ et $f(c)$. Par l'absurde : dans le cas contraire, on aurait par exemple $f(c)$ entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (**2**.6.*2*, 3°), il existerait $t \in [a, b]$ tel que $f(c) = f(t)$, et on aurait $c = t$ (f est injective), en contradiction avec $c \notin [a, b]$.

On raisonnerait de même si $f(a)$ était entre $f(b)$ et $f(c)$.

— Fixons nous maintenant a et b dans I, $a < b$. En remplaçant éventuellement f par $-f$, on peut supposer $f(a) < f(b)$. On va montrer qu'alors f est croissante. Soit $(x, y) \in I^2$, avec $x < y$. En étudiant les différentes positions possibles de a, b, x et y, on montrera que $f(x) < f(y)$. Par exemple :

Si $a < x < b < y$, on a $f(a) < f(x) < f(b)$ et $f(a) < f(b) < f(y)$, donc $f(x) < f(y)$; si $a < x < y < b$, on a : $f(a) < f(x) < f(b)$ et $f(a) < f(x) < f(y)$, etc. □

AUTRE DÉMONSTRATION. — L'application $g : (x, y) \longmapsto f(x) - f(y)$ du connexe $\Delta = \{(x, y) \in I^2 / x > y\}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est continue et ne prend pas la valeur 0 (car f est injective); $g(\Delta)$ est ainsi un connexe de $\mathbb{R}$ (intervalle) ne contenant pas 0; suivant qu'il est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ou dans $\mathbb{R}_-^*$, f est strictement croissante ou strictement décroissante.

REMARQUE. — On peut déduire de ce théorème que deux intervalles I et J homéomorphes sont de même nature topologique (ouverts, fermés, semi-ouverts) et que les bornes se correspondent (avec échange des bornes supérieures et inférieures si f est décroissante).

On notera que le caractère borné ou non n'est pas conservé par homéomorphisme. Cependant, on rappelle que l'image continue d'un *segment* est un segment (compact et connexe).

4.3.3. Monotonie et dérivabilité

1° THÉORÈME. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable à droite sur $\mathring{I}$.**

i) **f est constante si et seulement si :** $\forall t \in \mathring{I} \quad f'_d(t) = 0$

ii) **f est croissante si et seulement si :** $\forall t \in \mathring{I} \quad f'_d(t) \geqslant 0$

iii) **f est décroissante si et seulement si :** $\forall t \in \mathring{I} \quad f'_d(t) \leqslant 0$.

i) Est déjà connu (**4.2.1**, 2°).

ii) On vérifie immédiatement que si f est croissante, alors :

$$\forall t \in \mathring{I} \quad f'_d(t) \geqslant 0.$$

Inversement supposons cette inégalité vérifiée. Soit $(a, b) \in I^2$, avec $a < b$. On peut appliquer le théorème des accroissements finis (**4.2.1**, 1°) sur $[a, b]$, en prenant pour fonction vectorielle la fonction nulle, pour fonction numérique la fonction f. Il vient alors : $0 \leqslant f(b) - f(a)$.

iii) Résulte de *ii*) appliqué à $-f$. □

2° *Caractérisation des applications strictement monotones.* — THÉORÈME. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable à droite sur $\mathring{I}$. Pour que f soit strictement croissante (resp. décroissante) sur I, il faut et il suffit que $f'_d \geqslant 0$ (resp. $f'_d \leqslant 0$) et que l'ensemble $X = \{t \in \mathring{I} \mid f'_d(t) = 0\}$ ait son intérieur vide.**

La condition est nécessaire. — Par hypothèse f est strictement croissante. On a donc $f'_d \geqslant 0$. Si $\mathring{X}$ n'était pas vide, X contiendrait un intervalle non vide et non réduit à un point; la restriction de f à cet intervalle serait constante, en contradiction avec la stricte monotonie de f. □

La condition est suffisante. — Par hypothèse $f'_d \geqslant 0$ et $\mathring{X} = \emptyset$. f est donc croissante. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. On aurait alors $f(t) = f(a) = f(b)$ pour tout t de $[a, b]$, d'où $]a, b[\subset \mathring{X}$, en contradiction avec $\mathring{X} = \emptyset$. □

REMARQUE. — L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \longmapsto t^3$ montre que f peut être strictement croissante sans que $X = \emptyset$.

3° ***Difféomorphisme de classe C^n.*** — DÉFINITION. — **Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une bijection, et n un entier naturel non nul. On dit que f est un C^n-difféomorphisme (ou difféomorphisme de classe C^n) si et seulement si les applications f et f^{-1} sont de classe C^n (ce qui signifie que les applications $I \to \mathbb{R}$ et $J \to \mathbb{R}$ qui coïncident respectivement avec f sur I et avec f^{-1} sur J sont de classe C^n).**

REMARQUES. — *a*) Le composé de deux C^n-difféomorphismes et un C^n-difféomorphisme,
b) Un homéomorphisme, même de classe C^∞, n'est pas nécessairement un difféomorphisme. C'est ainsi que $t \longmapsto t^3$ est un homéomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais, l'application réciproque $t \longmapsto t^{1/3}$ n'étant pas dérivable au point 0, ce n'est pas un difféomorphisme.

THÉORÈME I. — **Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ un homéomorphisme, et t_0 un point de I en lequel f est dérivable. Pour que f^{-1} soit dérivable en $f(t_0)$, il faut et il suffit que $f'(t_0) \neq 0$; on a alors :**

$$(f^{-1})' [f(t_0)] = 1/f'(t_0).$$

Notons φ pour f^{-1} et u_0 pour $f(t_0)$. D'après l'hypothèse, et la continuité de φ :

$$\lim_{t \to t_0,\, t \neq t_0} \frac{f(t) - u_0}{t - t_0} = f'(t_0) ; \qquad \lim_{u \to u_0,\, u \neq u_0} \varphi(u) = u_0$$

Comme $u \neq u_0$ entraîne $\varphi(u) \neq t_0$, le théorème de composition des limites s'applique. Il donne :

$$\lim_{u \to u_0,\, u \neq u_0} \frac{f[\varphi(u)] - u_0}{\varphi(u) - t_0} = f'(t_0), \text{ soit : } \lim_{u \to u_0,\, u \neq u_0} \frac{u - u_0}{\varphi(u) - \varphi(u_0)} = f'(t_0)$$

— La condition $f'(t_0) \neq 0$ est bien suffisante.

— Inversement si $f'(t_0)$ était nul on aurait, compte tenu de la monotonie de φ :

$$\lim_{u \to u_0,\, u \neq u_0} \frac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{u - u_0} = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{u \to u_0,\, u \neq u_0} \frac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{u - u_0} = -\infty$$

THÉORÈME II. — **Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ un homéomorphisme, et n un naturel non nul. Pour que f soit un C^n-difféomorphisme, il faut et il suffit que f soit de classe C^n et que f' ne prenne la valeur 0 en aucun point de I.**

La condition est nécessaire. — Conséquence immédiate du théorème I.

La condition est suffisante. — Supposons-la remplie, et notons φ pour f^{-1}. Alors φ est dérivable sur I et on a $\varphi' = \dfrac{1}{f' \circ \varphi}$, ce qui montre que φ est de classe C^1.

Supposons φ de classe C^m, avec $m < n$; alors $f' \circ \varphi$ est de classe C^m.

Comme $t \longmapsto 1/t$ est de classe C^∞ sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et comme $f' \circ \varphi$ prend ses valeurs dans l'un de ces intervalles, $\varphi' = 1/(f' \circ \varphi)$ est de classe C^m, ce qui entraîne que φ est de classe C^{m+1}. Par récurrence, on en déduit que φ est de classe C^n. □

Le calcul effectif des dérivées successives de l'une des fonctions f ou φ en fonction de l'autre est un problème de dérivation d'une application composée C'est ainsi que, si $n \geqslant 2$, on écrit que $\varphi' \circ f$ et $1/f'$ ont même dérivée en tout point de I. D'où (**4**.1.*2*, 3°) :

$$f'(\varphi'' \circ f) = -f''/f'^2, \text{ ou } \quad \varphi'' \circ f = -f''/f'^3,$$

ce qui peut s'écrire : $\quad \varphi'' = -(f'' \circ \varphi)/(f' \circ \varphi)^3$.

Si $n \geqslant 3$, on trouve de même : $\varphi''' \circ f = (3f''^2 - f'f''')/f'^5$.

4.3.*4*. Théorème de Rolle

1° Lemme de Rolle. — **Soit** f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ **une application continue sur** $[a, b]$, **dérivable sur** $]a, b[$, **et telle que** $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ **tel que** $f'(c) = 0$.

— Si f est constante, le résultat est trivial.

— Si f n'est pas constante, on peut, en raisonnant éventuellement sur $-f$, supposer : $(\exists\, t_0 \in]a, b[\quad f(t_0) > f(a))$. Considérons alors $M = \sup\limits_{t \in [a, b]} f(t)$. $[a, b]$ étant compact, et f continue, on sait qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $M = f(c)$. De $M \geqslant f(t_0) > f(a)$, on déduit $c \in]a, b[$; d'où la dérivabilité de f au point c.

On peut écrire :

$$f'(c) = \lim_{t \to c,\, t > c} \frac{f(t) - M}{t - c} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f'(c) = \lim_{t \to c,\, t < c} \frac{f(t) - M}{t - c} \geqslant 0\,;$$

d'où $f'(c) = 0$. □

2° Théorème de Rolle. — **Soit** f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ **une application continue sur** $[a, b]$, **dérivable sur** $]a, b[$. **Alors il existe** $c \in]a, b[$ **tel que**

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

On applique le lemme à la fonction φ, définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a). \qquad □$$

Remarques. — *a*) Géométriquement, le théorème dit qu'il existe un point du graphe de f en lequel la tangente est parallèle à la droite qui contient les points $[a, f(a)]$ et $[b, f(b)]$.

Ce théorème, parfois appelé théorème des accroissements finis, permet de retrouver le théorème des accroissements finis vu au n° **4**.2.*1*, 1°. Il est à la fois plus précis (existence de c) et plus restrictif (hypothèses plus fortes). *Il ne s'applique pas aux applications à valeurs vectorielles.* Ainsi l'application f définie par $f(t) = e^{it}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = f(2\pi)$ et cependant sa dérivée $f'(t) = i\, e^{it}$ n'est jamais nulle.

b) Il est souvent commode de poser $b = a + h$. On écrit alors $c = a + \theta h$, avec $\theta \in]0, 1[$. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de supposer $h > 0$.

3° Généralisation. — **Soient f et g des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que**

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(c) \\ g(b)-g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Si $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$ la proposition est triviale. Sinon, en supposant par exemple $g(b)-g(a) \neq 0$, on peut appliquer le lemme de Rolle à :

$$t \longmapsto f(t)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(t)-g(a)]. \qquad \square$$

De cette généralisation est déduite la proposition suivante, connue sous le nom de règle de L'Hôpital :

Proposition. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I, f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I, dérivables sur $I \setminus \{a\}$ et vérifiant :**

$$f(a) = 0\,; \quad g(a) = 0\,; \quad \forall t \in I\setminus\{a\} \quad g'(t) \neq 0.$$

Dans ces conditions :

Si $\lim\limits_{t \to a,\, t \neq a} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = l$, $(l \in \overline{\mathbb{R}})$, **alors** $\lim\limits_{t \to a,\, t \neq a} \dfrac{f(t)}{g(t)} = l$.

Remarquons que, compte tenu du lemme de Rolle, l'hypothèse entraîne :

$$\forall t \in I\setminus\{a\} \qquad g(t) \neq 0$$

A tout $t \in I\setminus\{a\}$ on peut associer $\theta(t)$, compris entre a et t, tel que :

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'[\theta(t)]}{g'[\theta(t)]}.$$

Pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < |u-a| < \alpha$ entraîne

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} \in V.$$

Il en résulte que $0 < |t-a| < \alpha$ entraîne $0 < |\theta(t)-a| < \alpha$ et donc $\dfrac{f(t)}{g(t)} \in V$.

Remarque. — La proposition s'étend au cas $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

4° ***Formule de Taylor-Lagrange.*** — Théorème. — **Soient n un entier strictement positif, $S = [a, b]$, (resp. $[b, a]$) un segment de $\mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ une application de classe C^n admettant une dérivée d'ordre $n+1$ en tout point de $\mathring{S}$. Alors il existe un point c de $\mathring{S}$ tel que :**

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Reprenons les notations du 4.2.2, 1°, et considérons ψ_n définie par :

$$\psi_n(t) = \varphi_n(t) - \alpha \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où α est choisi de telle sorte que $\psi_n(a) = 0$. On constate $\psi_n(b) = 0$.

Le théorème de Rolle, appliqué à ψ_n, fournit alors un point c de $\mathring{S}$ tel que $\psi_n'(c) = 0$, soit encore $\alpha = f^{(n+1)}(c)$. Il en résulte :

$$\varphi_n(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = 0 \qquad \square$$

4.4. FONCTIONS USUELLES

• En ce qui concerne les fonctions logarithmes et exponentielles de base $a \in \mathbb{R}_+^*$, ainsi que les fonctions puissances, limitons-nous aux rappels suivants :

— la fonction *logarithme népérien*, notée ln (ou Log), est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant la primitive de $t \longmapsto 1/t$ qui prend la valeur 0 au point $t = 1$. Elle est strictement croissante.

On a : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \ln ab = \ln a + \ln b$

et $\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty; \quad \lim_{t \to 0, t > 0} \ln t = -\infty.$

La fonction ln est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On définit ici e par $\ln e = 1$, quitte à faire plus tard la jonction avec le nombre d'Euler du **1**.2.*2*, 2°;

— la *fonction exponentielle*, notée exp ou $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, est l'application réciproque de la fonction ln;

— pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ on dispose de $\log_a$ et $\exp_a$ (notée aussi $t \longmapsto a^t$) respectivement définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \longmapsto \ln t/\ln a \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto \exp(t \ln a), \quad (\text{ou } a^t = \mathrm{e}^{t \ln a});$$

— pour $a \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la *fonction puissance* :

$$t \longmapsto t^a, \text{ i.e. } t \longmapsto \mathrm{e}^{a \ln t}.$$

Entre autres résultats on établit :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 0, t > 0} t^\beta . |\ln t|^\alpha = 0 \quad (\alpha > 0 \text{ et } \beta > 0)$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^\alpha}{a^t} = 0 \qquad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} |t|^\alpha . a^t = 0 \qquad (\alpha > 0 \text{ et } a > 1)$$

• En ce qui concerne les fonctions trigonométriques circulaires et le nombre π, nous nous en tiendrons ici aux résultats acquis en classes terminales, en nous réservant de reprendre ces questions dans un autre contexte et de montrer qu'il n'en résulte aucun cercle vicieux.

* Nous utiliserons les généralités sur l'étude d'une fonction et sur sa représentation graphique qui se trouvent en tête du chapitre 5. *

4.4.*1*. Applications circulaires réciproques

1° ***Application arc sinus.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **L'application sinus (notée sin) induit un homéomorphisme croissant de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, +1]$. L'homéomorphisme réciproque est appelé arc sinus, et noté Arc sin. C'est un homéomorphisme croissant de $[-1, +1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, et il induit un C^∞-difféomorphisme de $]-1, +1[$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.**

Résulte immédiatement du théorème des fonctions réciproques et de 4.3.3, 3°. Il vient en outre, pour $t \in]-1, +1[$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{Arc sin } t) = \frac{1}{\cos(\text{Arc sin } t)}.$$

En tenant compte de :

$\cos(\text{Arc sin } t) \geqslant 0$, $\cos^2(\text{Arc sin } t) + \sin^2(\text{Arc sin } t) = 1$ et $\sin(\text{Arc sin t}) = \text{t}$,

il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{Arc sin } t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (t \in]-1, +1[). \qquad \square$$

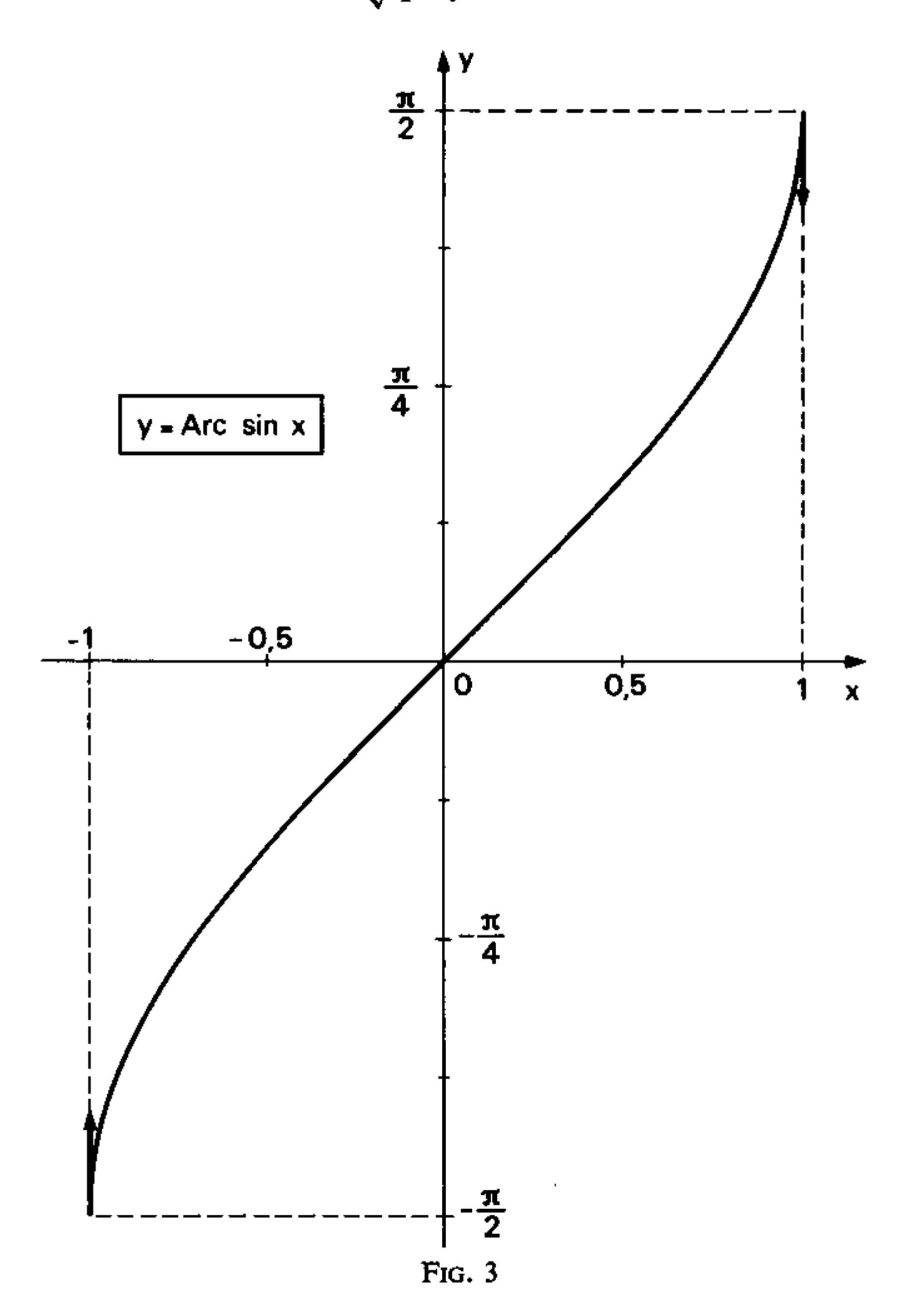


FIG. 3

2° ***Application arc cosinus.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **L'application cosinus (notée cos) induit un homéomorphisme décroissant de $[0, \pi]$ sur $[-1, +1]$. L'homéomorphisme réciproque est appelé arc cosinus, et noté**

Arc cos. C'est un homéomorphisme décroissant de $[-1, +1]$ sur $[0, \pi]$, et il induit un C^∞-difféomorphisme de $]-1, +1[$ sur $]0, \pi[$.

La justification est identique, et on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\operatorname{Arc\,cos} t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (t \in]-1, +1[). \qquad \square$$

REMARQUES. — *a*) L'application $t \longmapsto \operatorname{Arc\,sin} t + \operatorname{Arc\,cos} t$ est continue sur $[-1, +1]$, de dérivée nulle sur $]-1, +1[$. De :

$$\operatorname{Arc\,sin} 0 = 0 \text{ et } \operatorname{Arc\,cos} 0 = \frac{\pi}{2}$$

on déduit :

$$\forall\, t \in [-1, +1] \qquad \operatorname{Arc\,sin} t + \operatorname{Arc\,cos} t = \frac{\pi}{2}.$$

b) Il nous arrivera de considérer, par abus de langage, que Arc sin et Arc cos sont des applications de $[-1, +1]$ dans $\mathbb{R}$.

3° ***Application arc tangente.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **La restriction de la fonction tangente (notée tg) à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est un C^∞-difféomorphisme croissant de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Le difféomorphisme réciproque est appelé arc tangente, et noté Arc tg. C'est un C^∞-difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.**

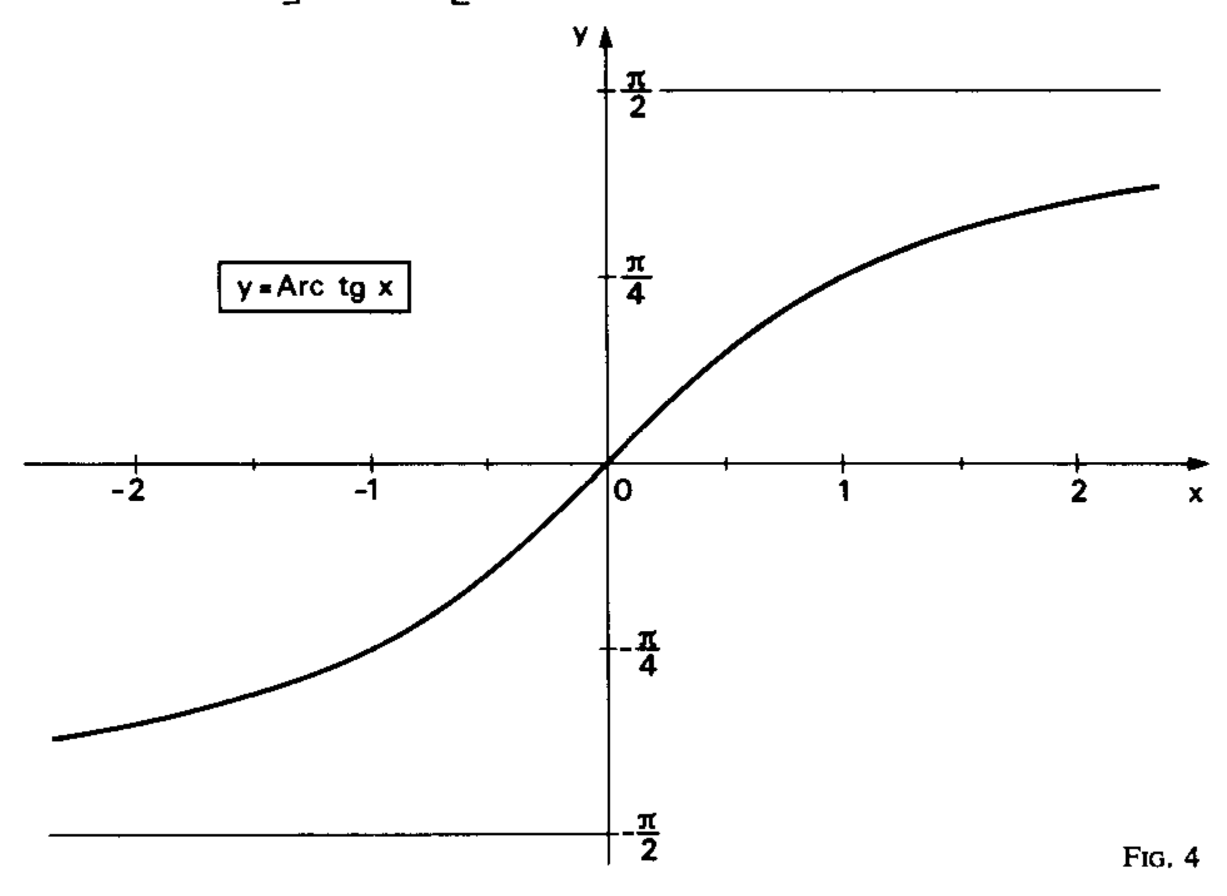


FIG. 4

On obtient aisément :

$$\frac{d}{dt}(\text{Arc tg } t) = \frac{1}{1+\text{tg}^2(\text{Arc tg } t)}$$

et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \frac{d}{dt}(\text{Arc tg } t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

REMARQUES. — *a*) En dérivant $t \longmapsto \text{Arc tg}\,\frac{1}{t}$ sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ on démontre :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad \text{Arc tg } t + \text{Arc tg}(1/t) = (\pi/2)\,\text{sgn}\, t.$$

b) On peut également considérer Arc tg comme une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

c) On définit parfois une application arc cotangente (notée Arc cotg) en considérant la restriction de cotg à $]0, \pi[$.

4° ***Formulaire.*** — Le lecteur vérifiera aisément les formules usuelles suivantes ; il en trouvera d'autres en exercice :

$$x = \text{Arc sin } t \iff (t = \sin x) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \text{Arc cos } t \iff (t = \cos x) \wedge (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

$$x = \text{Arc tg } t \iff (t = \text{tg } x) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin(\text{Arc sin } t) = t$; $\cos(\text{Arc sin } t) = \sqrt{1-t^2}$; $\text{tg}(\text{Arc sin } t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ $(|t| \neq 1)$

$\sin(\text{Arc cos } t) = \sqrt{1-t^2}$; $\cos(\text{Arc cos } t) = t$; $\text{tg}(\text{Arc cos } t) = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$ $(t \neq 0)$

$\sin(\text{Arc tg } t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos(\text{Arc tg } t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $\text{tg}(\text{Arc tg } t) = t$

$$t = \sin x \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad (x = \text{Arc sin } t + 2k\pi) \vee (x = \pi - \text{Arc sin } t + 2k\pi)$$

$$t = \cos x \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad (x = \text{Arc cos } t + 2k\pi) \vee (x = -\text{Arc cos } t + 2k\pi)$$

$$t = \text{tg } x \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad (x = \text{Arc tg } t + k\pi)$$

5° Les *représentations graphiques* des applications Arc sin, Arc cos, Arc tg, dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé s'obtiennent par symétrie par rapport à la droite $y - x = 0$, à partir de celles de restrictions convenablement choisies des fonctions sin, cos et tg (résultat acquis en classe terminale).

4.4.2. Trigonométrie hyperbolique

1° DÉFINITION. — **On désigne par :**

— **sinus hyperbolique l'application** sh : $t \longmapsto (e^t - e^{-t})/2$

— **cosinus hyperbolique l'application** ch : $t \longmapsto (e^t + e^{-t})/2$

— **tangente hyperbolique l'application** th : $t \longmapsto \text{sh}\, t/\text{ch}\, t$

Parité. — En utilisant $\text{th}\, t = (e^{2t}-1)/(e^{2t}+1)$, on constate qu'il s'agit de trois applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que ch est paire, que sh et th sont impaires.

Dérivabilité. — Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a, par un calcul très simple :

$$\frac{d}{dt}(\text{sh}\, t) = \text{ch}\, t\,; \qquad \frac{d}{dt}(\text{ch}\, t) = \text{sh}\, t\,; \qquad \frac{d}{dt}(\text{th}\, t) = \frac{1}{\text{ch}^2\, t} = 1-\text{th}^2\, t.$$

On en déduit qu'il s'agit de trois applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Variation. — Les restrictions à $[0, +\infty[$ sont strictement croissantes. Pour th et sh cela résulte du signe de la dérivée (il est visible que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \text{ch}\, t > 0).$$

On a donc : $\forall t \in\,]0, +\infty[\quad \text{sh}\, t > \text{sh}\, 0 = 0$. D'où le résultat pour ch.

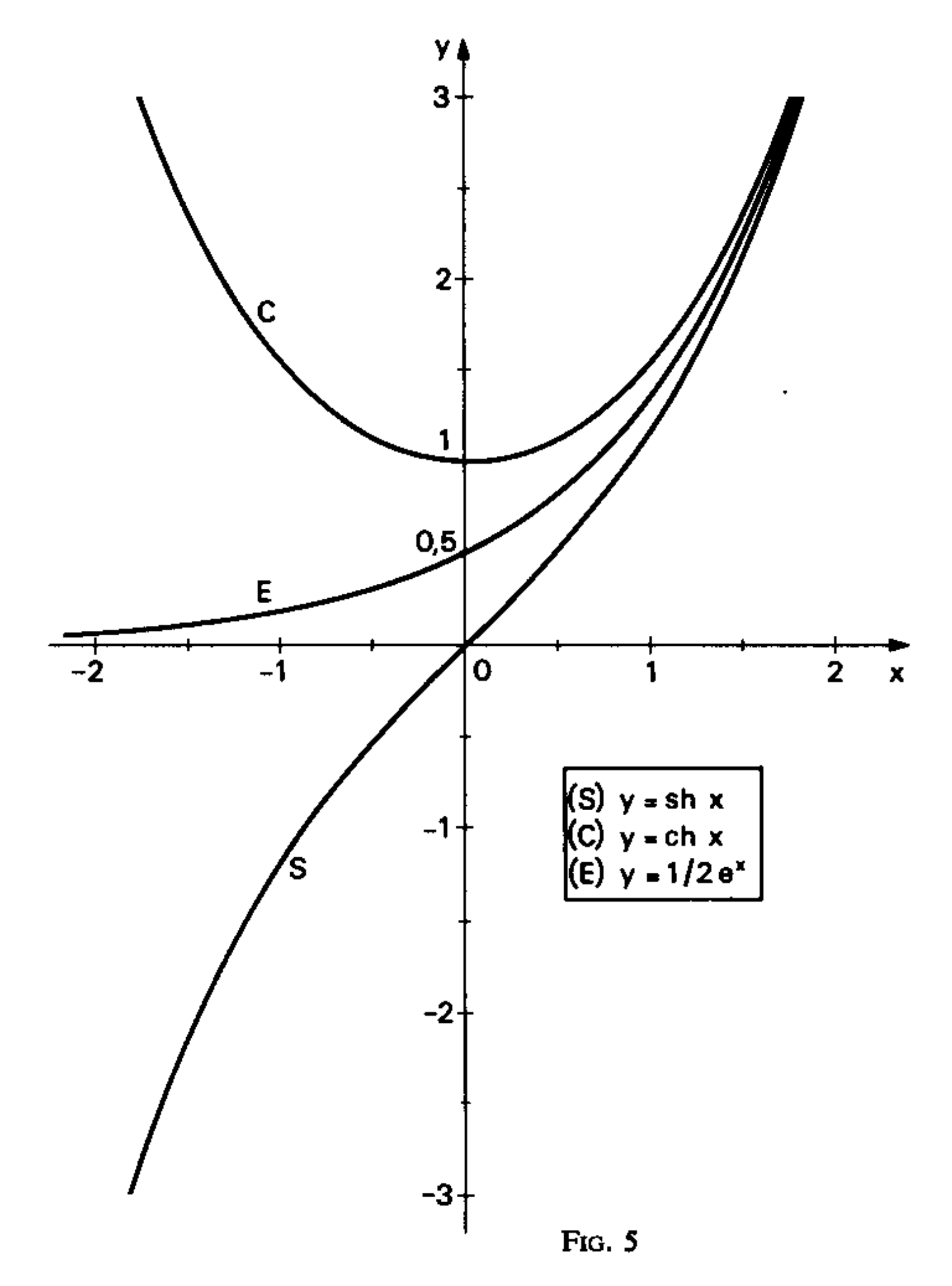


FIG. 5

Limites. — De $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, on déduit :

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{sh} t = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} \operatorname{ch} t = +\infty.$$

On a : $$\lim_{t \to +\infty} (\operatorname{ch} t - e^t/2) = \lim_{t \to +\infty} (e^t/2 - \operatorname{sh} t) = 0.$$

De $\operatorname{th} t = \dfrac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$, on déduit : $\lim\limits_{t \to +\infty} \operatorname{th} t = 1$.

On peut maintenant résumer l'étude par une figure.

2° ***Trigonométrie hyperbolique.*** — Les applications sh, ch et th permettent de développer une trigonométrie analogue à celle que connaît le lecteur, (cette analogie sera expliquée plus loin).

On vérifie d'abord : $\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = e^t$ et $\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = e^{-t}$.

D'autre part, un simple calcul à partir des définitions montre :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

et

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

A partir de là, on établit aisément le formulaire suivant :

$$\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = e^t\ ; \qquad \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = e^{-t}\ ; \qquad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b\ ; \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b\ ; \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}\ ; \qquad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t\ ; \qquad \operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = 2\operatorname{ch}^2 t - 1 = 2\operatorname{sh}^2 t + 1$$

$$\operatorname{th} 2t = \frac{2 \operatorname{th} t}{1 + \operatorname{th}^2 t}\ ; \qquad \operatorname{ch} t - 1 = 2\operatorname{sh}^2 \frac{t}{2}\ ; \qquad \operatorname{ch} t + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{2 \operatorname{th} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}}\ ; \qquad \operatorname{ch} t = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}}\ ; \qquad \operatorname{th} t = \frac{2\, th \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}}$$

$$2 \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)$$
$$2 \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)$$
$$2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}\ ; \quad \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}\ ; \quad \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

3° ***Applications hyperboliques réciproques.*** — *a*) DÉFINITION. — **L'application** sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **l'application** $\mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ **induite par restriction de** ch, **l'application** $\mathbb{R} \to]-1, +1[$ **induite de** th **sont des homéomorphismes**

croissants. Les homéomorphismes réciproques sont respectivement appelés argument sinus hyperbolique (noté Arg sh), **argument cosinus hyperbolique** (**noté** Arg ch), **et argument tangente hyperbolique** (**noté** Arg th).

On vérifie aisément :

$$\frac{d}{dt}(\text{Arg sh } t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$$\frac{d}{dt}(\text{Arg ch } t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \qquad (t > 1)$$

$$\frac{d}{dt}(\text{Arg th } t) = \frac{1}{1-t^2} \qquad (-1 < t < 1).$$

On constate que Arg sh est un C^∞-difféomorphisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que Arg ch induit un C^∞-difféomorphisme $]1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$, et que Arg th est un C^∞-difféomorphisme $]-1, +1[\to \mathbb{R}$.

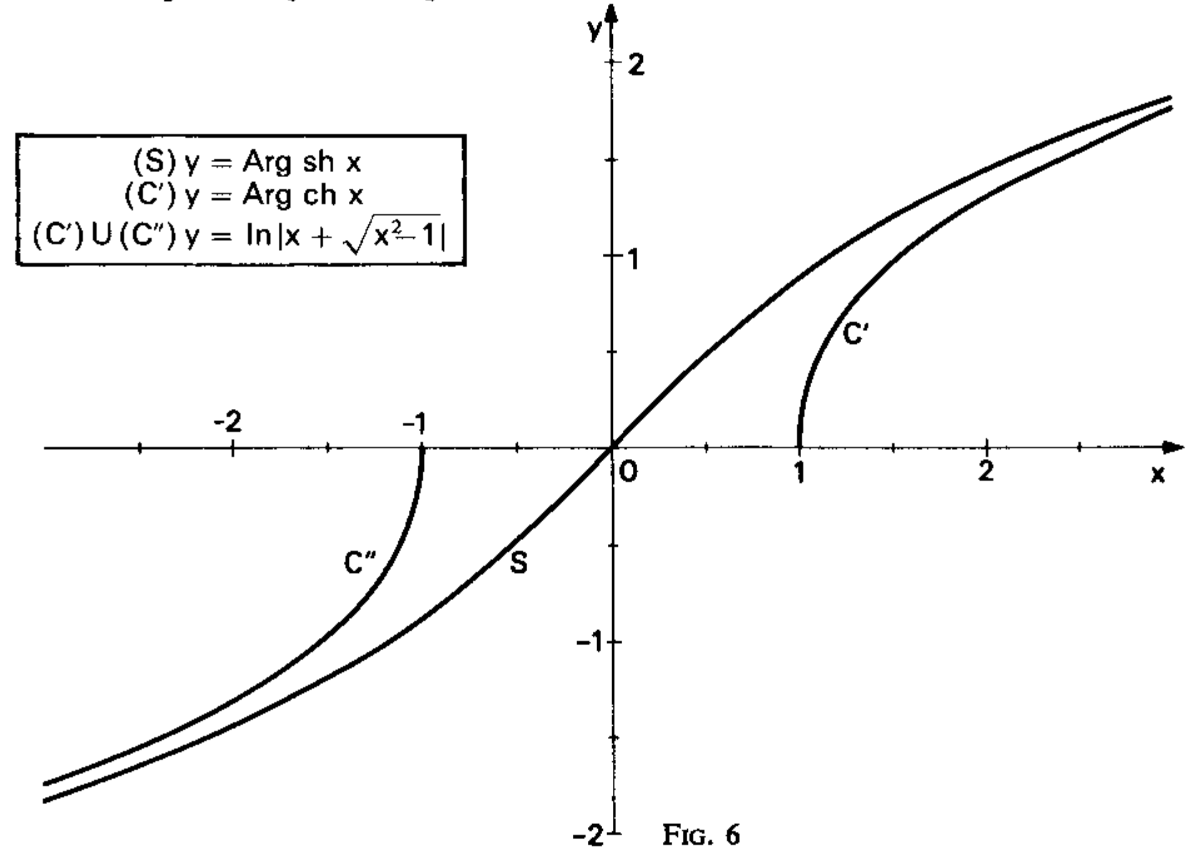


FIG. 6

b) *Expression logarithmique des fonctions hyperboliques réciproques.* — On montre :

$$\text{Arg sh } t = \ln(t + \sqrt{1+t^2}); \quad \text{Arg ch } t = \ln(t + \sqrt{t^2-1})$$

$$\text{Arg th } t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}.$$

Vérifions par exemple la deuxième égalité.

Soit $t \in [1, +\infty[$. Posons $x = \text{Arg ch } t$. On a $t = \text{ch } x$ et $x \geqslant 0$. Il en résulte $\text{sh } x = \sqrt{t^2-1}$ ($\text{sh}^2 x = \text{ch}^2 x - 1$ et $\text{sh } x \geqslant 0$), et donc

$$e^x = \text{ch } x + \text{sh } x = t + \sqrt{t^2-1}, \text{ d'où } x = \ln(t + \sqrt{t^2-1}).$$ □

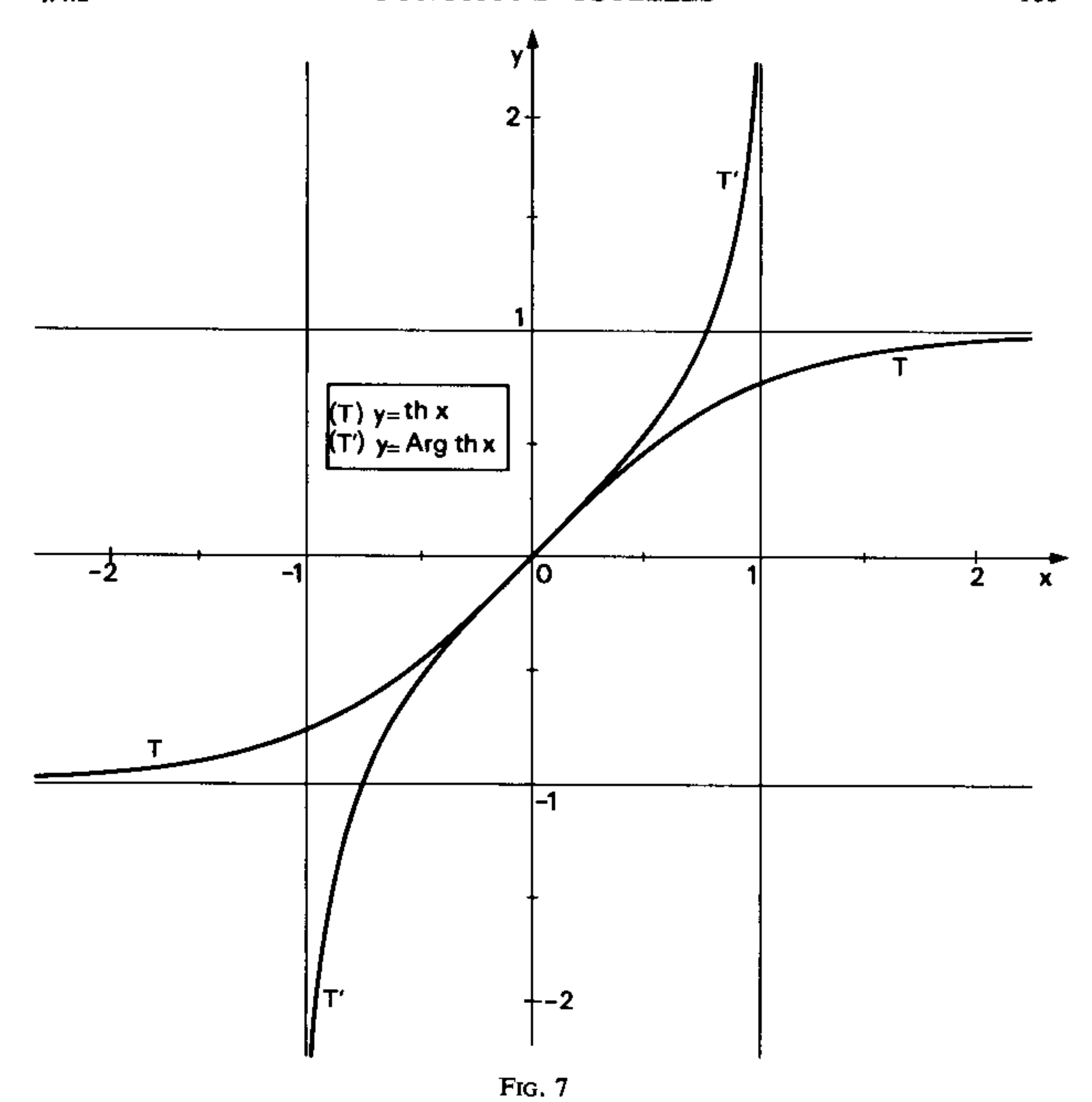


FIG. 7

c) *Formulaire.*

$x = \text{Arg sh}\, t \iff t = \text{sh}\, x$; $x = \text{Arg ch}\, t \iff (t = \text{ch}\, x) \wedge (x \geqslant 0)$

$x = \text{Arg th}\, t \qquad t = \text{th}\, x$; $\text{Arg sh}\, t = \ln\,(t + \sqrt{1 + t^2})$

$\text{Arg ch}\, t = \ln\,(t + \sqrt{t^2 - 1})$; $\text{Arg th}\, t = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + t}{1 - t}$

$\text{Sh}\,(\text{Arg sh}\, t) = t$; $\text{ch}\,(\text{Arg sh}\, t) = \sqrt{1+t^2}$; $\text{th}\,(\text{Arg sh}\, t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\text{Sh}\,(\text{Arg ch}\, t) = \sqrt{t^2-1}$; $\text{ch}\,(\text{Arg ch}\, t) = t$; $\text{th}\,(\text{Arg ch}\, t) = \dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t}$

$\text{Sh}\,(\text{Arg th}\, t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$; $\text{ch}\,(\text{Arg th}\, t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$; $\text{th}\,(\text{Arg th}\, t) = t$

4.5. FONCTIONS CONVEXES

4.5.*1*. Fonction convexe d'une variable réelle

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) $\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall t \in [0, 1] \qquad f(tx+(1-t)y) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y)$

ii) $\forall (x, y, z) \in I^3 \qquad (x < y < z) \Longrightarrow \left(\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}\right)$

iii) $\forall a \in I \qquad t \longmapsto \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ **est croissante sur** $I \backslash \{a\}$.

iv) $\forall (x, y, z) \in I^3 \qquad (x < y < z) \Longrightarrow \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geqslant 0\right)$

v) **L'ensemble** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in I) \wedge (f(x) \leqslant y)\}$ **(appelé épigraphe de f) est une partie convexe de** $\mathbb{R}^2$.

Une fonction f est dite convexe sur I si et seulement si elle vérifie ces assertions.

i) $\Longrightarrow$ *ii)*. Par hypothèse, *i)* est vraie. Soit $(x, y, z) \in I^3$ tel que : $x < y < z$; on peut poser $y = t_0 x + (1-t_0) z$, avec $t_0 \in]0, 1[$:

$$t_0 = (z-y)/(z-x).$$

On a alors, d'après *i)* :

$$f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z).$$

On en déduit :

$$f(y)-f(x) \leqslant \frac{y-x}{z-x} [f(z)-f(x)]$$

et enfin, grâce à $y-x > 0$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

On vérifie, de façon analogue, la deuxième inégalité en remarquant :

$$f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x} f(x) + \left(1 - \frac{z-y}{z-x}\right) f(z).$$

ii) $\Longrightarrow$ *iii)*. Immédiatement, en prenant pour (x, y, z) les triplets (t, t', a), (t, a, t') et (a, t, t').

iii) $\Longrightarrow$ *iv)*. En retranchant la première colonne aux deux autres, il vient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} = (z-x)(y-x)\left[\frac{f(z)-f(x)}{z-x} - \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right]$$

qui est positif d'après la croissance de $t \longmapsto \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ sur $I \backslash \{x\}$.

iv) $\Longrightarrow$ *i*). Par hypothèse, *iv*) est vraie. Pour $(x, y) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$, on a en supposant d'abord $x \leqslant y$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & tx+(1-t)y & y \\ f(x) & f(tx+(1-t)y) & f(y) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

D'où, par combinaison linéaire de colonnes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 0 & y \\ f(x) & f(tx+(1-t)y)-tf(x)-(1-t)f(y) & f(y) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

et, de $x-y \leqslant 0$, on déduit : $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$. Le résultat subsiste si $y \leqslant x$ (changer t en $1-t$). □

v) $\Longleftrightarrow$ *i*). Cette équivalence est laissée en exercice au lecteur.

Proposition. — **Si f est convexe sur I, pour tout système $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de I et tout système $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, on a :**

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Vérification aisée par récurrence.

Définition. — **La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave si, et seulement si la fonction $-f$ est convexe.**

2° ***Continuité et dérivabilité des fonctions convexes.*** — Théorème. — **Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Alors f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point a intérieur à I, et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$; f est continue sur $\mathring{I}$; d'autre part, si $(a, b) \in (\mathring{I})^2$ et $a < b$, $f'_d(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b)$; enfin f'_g et f'_d sont des fonctions croissantes sur $\mathring{I}$.**

— Soit $a \in \mathring{I}$. Fixons $t_0 \in I \cap]a, +\infty[$. Pour tout $t < a$: $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \leqslant \dfrac{f(t_0)-f(a)}{t_0-a}$.
Il résulte alors du théorème de la limite monotone que $f'_g(a)$ existe et $f'_g(a) \leqslant \dfrac{f(t_0)-f(a)}{t_0-a}$.
Cette inégalité étant vraie pour tout $t_0 > a$, il en résulte de même l'existence de $f'_d(a)$, et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$. f est ainsi continue à droite et à gauche, donc continue en a.

— Si $(a, b) \in (\mathring{I})^2$, et $a < b$

$$f'_d(a) = \inf_{t \in I,\, t > a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}, \qquad \text{et donc} \qquad f'_d(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On raisonne de même pour $f'_g(b)$, et en définitive :

$$f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b). \qquad \square$$

Remarque. — f peut être convexe sur I sans être continue sur I, comme le montre l'exemple : $I = [0, 1]$, $f(t) = 0$ si $t \in]0, 1[$, $f(0) = f(1) = 1$.

3° ***Caractérisation des fonctions convexes.*** — Théorème. — **Soient I un intervalle ouvert et f une fonction numérique définie sur I. Alors f est convexe si et seulement si elle est continue sur I et admet sur I une dérivée à droite croissante.**

— La condition est nécessaire d'après le 2°.

— Inversement soit f continue, dérivable à droite, f'_d étant croissante.

Soit $(x, y, z) \in I^3$ tel que $x < y < z$. On a, pour $t \in [y, z]$ $f'_d(y) \leqslant f'_d(t) \leqslant f'_d(z)$. Soit alors g la fonction définie sur $[y, z]$ par $g(t) = f(t) - t f'_d(y)$. g est continue, et $\forall t \in]y, z[$ $g'_d(t) = f'_d(t) - f'_d(y) \geqslant 0$. Donc g est croissante, et ainsi $g(z) \geqslant g(y)$, d'où :

$$f'_d(y) \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

On montrerait de même : $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_d(y)$ et ainsi :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

On en déduit $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-y \\ f(x) & f(y)-f(x) & f(z)-f(y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geqslant 0$ □

COROLLAIRE. — **Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geqslant 0$.**

REMARQUE. — Il résulte de ce théorème qu'une fonction convexe dans un voisinage de chaque point de I est convexe sur I.

4° ***Droites affines d'appui.*** — THÉORÈME. — **Soient f une fonction numérique convexe sur un intervalle I, et $a \in \mathring{I}$. La droite affine de $\mathbb{R}^2$, d'équation $y = f(a) + m(x-a)$ est « au dessous » de graphe de f si et seulement si $f'_g(a) \leqslant m \leqslant f'_d(a)$**

De la démonstration précédente, on déduit, moyennant un changement de notation :

$$\forall (a, x) \in I^2 \qquad f(x) \geqslant f(a) + (x-a) f'_d(a) \tag{1}$$

On montrerait de même :

$$\forall (a, x) \in I^2 \qquad f(x) \geqslant f(a) + (x-a) f'_g(a) \tag{2}$$

La fin de la démonstration est laissée au lecteur, qui s'aidera d'un dessin. Il démontrera aussi la réciproque :

PROPOSITION. — **Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, dérivable à droite (resp. à gauche) et vérifiant** (1) (resp. (2)). **Alors f est convexe.**

5° ***Applications de la convexité.*** — Soit p un réel, $p \geqslant 1$. Pour $t \in [0, 1]$, posons $f(t) = (1 - t^{1/p})^p$. f est dérivable sur $]0, 1[$ et :

$$f'(t) = -t^{\frac{1}{p}-1}(1 - t^{1/p})^{p-1}$$

Les propriétés des fonctions puissances montrent aisément que f' est croissante sur $]0, 1[$, et donc que f est convexe sur $[0, 1]$ (puisque continue).

Soient maintenant $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des éléments de $\mathbb{R}_+$ vérifiant $a_i + b_i \neq 0$, pour tout i. Nous appliquons à f la proposition du 1° en prenant :

$$x_i = \frac{a_i^p}{(a_i+b_i)^p} \quad (i \in \mathbb{N}_n) \quad \text{et} \quad \alpha_i = \frac{(a_i+b_i)^p}{\sum_{j=1}^{n} (a_j+b_j)^p}$$

ce qui est licite puisque $x_i \in [0, 1]$, $\alpha_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Il vient alors l'inégalité, dite *inégalité de Minkowski* :

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

On remarque immédiatement que cette inégalité reste vraie si $a_i+b_i = 0$ pour certaines valeurs de $i \in \mathbb{N}_n$.

COROLLAIRE. — **Pour** $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, **posons** $v_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ (p réel $\geqslant 1$). **Alors** v_p **est une norme sur** $\mathbb{K}^n$.

Seule l'inégalité triangulaire présente quelque difficulté. On l'obtient aisément en utilisant l'inégalité de Minkowski, avec $a_i = |x_i|$ et $b_i = |y_i|$ ($i \in \mathbb{N}_n$).

REMARQUE. — Le lecteur vérifiera que $\lim_{p \to +\infty} v_p(x) = v_\infty(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}_n} |x_i|$.

- Au chapitre **8**, nous étudierons les fonctions convexes de plusieurs variables réelles.

4.6. PROBLÈMES D'INTERPOLATIONS ET D'APPROXIMATIONS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *et on considère l'ensemble* $\mathcal{F}$ *des applications d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans un* $\mathbb{K}$*-espace de Banach* E *(e.v.n. complet; en général* $E = \mathbb{K}^m$*).*

A $(f, g) \in \mathcal{F}^2$ *on associe l'écart de* f *et* g *qui est par définition* $\delta(f, g) = \sup_{t \in I} \|f(t) - g(t)\| \in \overline{\mathbb{R}}$.

4.6.*1*. Interpolation

1° ***Position du problème.*** — Étant données $f \in \mathcal{F}$ et une partie Φ de $\mathcal{F}$, on se propose de trouver $g \in \Phi$ assujettie à prendre la même valeur que f en un certain nombre de points de I.

Il y a naturellement intérêt à ce que le calcul des valeurs des éléments de Φ soit aussi simple que possible, et que l'on soit en mesure de calculer un majorant aussi petit que possible de $\delta(f, g)$.

2° ***Interpolation de Lagrange.*** — On choisit ici une famille $A = (a_1, ..., a_n)$ de points distincts de I, et on associe à f l'application polynomiale P associée au polynôme à coefficients dans E :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

Il est clair que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $a_i \in A$ et que $\deg P \leqslant n - 1$. En raisonnant comme au I.**6**.4.*4*, 4°, on constate que tout polynôme $Q \neq P$ qui prend la même valeur que P en chacun des a_i vérifie $\deg P > n - 1$, ce qui permet de dire que P est le *polynôme interpolateur de* f*, relatif à* A.

Majoration de $\delta(f, P)$. On suppose ici que f est de classe C^n.

PROPOSITION. — **$N(X)$ désignant le polynôme $\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$, on a :**

$$\forall t \in I \qquad \|f(t)-P(t)\| \leqslant \frac{1}{n!} \sup_{x \in S(t)} \|f^{(n)}(x)\| \cdot |N(t)| \tag{1}$$

où $S(t)$ est le plus petit segment de $\mathbb{R}$ contenant t et les a_i.

• Dans le cas $E = \mathbb{R}$ c'est une conséquence immédiate de :

LEMME. — **Pour tout $t \in I$, il existe $c \in S(t)$ tel que :**

$$f(t)-P(t) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) N(t)$$

En effet, pour $t = a_i$ on adopte c quelconque. Sinon on introduit, pour $t \notin A$ fixé :

$$h : x \longmapsto f(x) - P(x) - kN(x)$$

où k est la constante définie par $h(t) = 0$.

On constate que h admet les $n+1$ zéros distincts t et les a_i. Par applications itérées du lemme de Rolle, on en déduit qu'il existe $c \in S(t)$ tel que $h^{(n)}(c) = 0$, i.e., compte tenu de $P^{(n)} = 0$: $f^{(n)}(c) - kn! = 0$. □

• Dans le cas général le lecteur trouvera une démonstration de (1) au **6.7**.*2*, 6° *c*) (dans laquelle il remplacera f par $f - P$, ce qui n'altère pas $f^{(n)}$).

Dans le cas où I est un segment $[a, b]$, $a < b$, on dispose de :

$$M_n(f) = \sup_{x \in [a,b]} \|f^{(n)}(x)\|$$

et on a (en utilisant (1)) :

$$\boxed{\delta(f, P) \leqslant \frac{M_n(f)}{n!} \sup_{x \in [a,b]} |N(x)|}$$

A défaut de mieux, on majore $\sup_{x \in [a,b]} |N(x)|$ par $(b-a)^n$.

REMARQUE. — Supposons que $f : [a, b] \to E$ est C^∞, et vérifie :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+^* \qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad M_p(f) \leqslant \mu \tag{2}$$

On a alors : $\lim_{n \to +\infty} \mu(b-a)^n/n! = 0$ et f vérifie :

(3) Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout n-uplet A_n, le polynôme interpolateur P_n de f, relatif à A_n, vérifie $\delta(f, P_n) \leqslant \varepsilon$.

Il ne faudrait pas croire que f vérifie (3), même si elle ne vérifie pas (2) (cf. exercice **4**.56, phénomène de Runge).

3° ***Interpolation linéaire.*** — Il s'agit du cas $n = 2$ de l'interpolation de Lagrange. Soit $f : [a, b] \to E$, de classe C^2. On adopte $A = (a, b)$ et on a, pour tout $t \in [a, b]$.

$$P(t) = \frac{(b-t)f(a) + (t-a)f(b)}{b-a} = f(a) + \frac{t-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

On connaît ici $\sup_{x \in [a,b]} |N(x)| = (b-a)^2/4$. D'où :

$$\boxed{\delta(f, P) \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2(f)}$$

4.6.2. Approximation uniforme. Applications réglées

Rappelons que E et $\mathcal{F}$ désignent respectivement un $\mathbb{K}$-espace de Banach et l'ensemble des applications d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans E.

1° ***Approximation d'une fonction.*** — Étant donnée $f \in \mathcal{F}$, on pose :

DÉFINITION. — **Pour tout $(g, \alpha) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R}_+^*$, on dit que g approche f à moins de α si, et seulement si $\delta(f, g) \leqslant \alpha$.**

Pour toute partie Φ de $\mathcal{F}$, on dit que f peut être approchée uniformément par des éléments de Φ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\varphi \in \Phi$ qui approche f à moins de ε.

La remarque de la fin du **4.5.***1*, 2° fournit un premier exemple. Nous allons étudier au 2° un exemple classique d'approximation uniforme d'une fonction définie sur un segment, qui sera utilisé dans l'étude de l'intégrale de Riemann.

2° ***Applications réglées.*** — DÉFINITION. — **On dit qu'une application $f : [a, b] \longrightarrow E$ est réglée si et seulement si elle peut être approchée uniformément par des applications en escalier de $[a, b]$ dans E** (cf. **4.1.***3*, 5°).

Une application en escalier sur $[a, b]$ étant bornée, *toute application réglée sur $[a, b]$ est bornée.*

Une caractérisation des applications réglées d'un segment de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E fait l'objet d'un théorème qui sera démontré au IV.**2.**2.*2*, 2°, et qui dit que :

Une application $[a, b] \longrightarrow E$ est réglée si, et seulement si elle admet une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.

Les théorèmes I et II qui suivent en sont des cas particuliers. Nous en donnons ici des démonstrations élémentaires.

THÉORÈME I. — **Toute application continue $f : [a, b] \longrightarrow E$ est réglée.**

On sait que f est uniformément continue. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; on dispose de $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (t', t'') \in ([a, b])^2 \qquad (|t' - t''| \leqslant \eta) \Longrightarrow (\|f(t') - f(t'')\| \leqslant \varepsilon)$$

Soient $(a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b)$ une famille strictement croissante de réels tels que $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i - a_{i-1}) \leqslant \eta$, et $\varphi : [a, b] \longrightarrow E$ l'application définie par :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}_n \qquad \forall t \in [a_{i-1}, a_i[\qquad \varphi(t) = f(a_{i-1}) \\ \varphi(a_n) = f(a_n) \end{cases}$$

Il est clair que φ est en escalier et que $\delta(f, \varphi) \leqslant \varepsilon$. □

THÉORÈME II. — **Toute application continue par morceaux $f : [a, b] \longrightarrow E$ est réglée.**

D'après la définition de f, il existe une famille strictement croissante $(c_0 = a, c_1, \ldots, c_p = b)$ de réels tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}_p$, il existe une application continue g_k de $S_k = [c_{k-1}, c_k]$ dans E qui coïncide avec f sur $\mathring{S}_k$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème I, on peut associer à g_k une application en escalier $\psi_k : S_k \longrightarrow E$ telle que $\delta(g_k, \psi_k) \leqslant \varepsilon$. Notons φ_k l'application en escalier de S_k dans E qui coïncide avec ψ_k sur $\overset{\circ}{S}_k$ et prend les mêmes valeurs que f aux points c_{k-1} et c_k. On a :

$$\forall t \in S_k \qquad \|f(t) - \varphi_k(t)\| \leqslant \varepsilon$$

L'application φ qui, pour tout $k \in \mathbb{N}_p$, coïncide avec φ_k sur S_k est en escalier, et vérifie $\delta(f, \varphi) \leqslant \varepsilon$. □

3° *Autre exemple d'approximation uniforme.* — PROPOSITION. — **Pour toute application continue $f : [a, b] \longrightarrow E$ il existe une approximation uniforme par des applications continues et affines par morceaux de $[a, b]$ dans E.**

La démonstration est la même que celle du théorème I du 2°, à ceci près que $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est ici l'application, visiblement continue et affine par morceaux, qui est définie par :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}_n \qquad \forall t \in [a_{i-1}, a_i] \\ \qquad \varphi(t) = \dfrac{(a_i - t)f(a_{i-1}) + (t - a_{i-1})f(a_i)}{a_i - a_{i-1}} \end{cases}$$

Pour tout $t \in [a_{i-1}, a_i]$, on peut écrire :

$$f(t) = \frac{(a_i - t)f(t) + (t - a_{i-1})f(t)}{a_i - a_{i-1}}$$

En utilisant : $a_i - t \leqslant \eta$ et $t - a_{i-1} \leqslant \eta$, on a alors :

$$\|f(t) - f(a_i)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f(t) - f(a_{i-1})\| \leqslant \varepsilon$$

On en déduit :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \qquad \forall t \in [a_{i-1}, a_i] \qquad \|f(t) - \varphi(t)\| \leqslant \varepsilon$$

et donc : $\delta(f, \varphi) \leqslant \varepsilon.$ □

EXERCICES

La résolution des premiers exercices fait intervenir l'étude de la continuité (ch. **2**).

4.01. — Etudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{t}{1+t^2} \text{ si } t \notin \mathbb{Q}\,; \qquad f(t) = \frac{pq}{p^2+q^2+2q} \text{ si } t = \frac{p}{q}\ (p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1)$$

4.02. — Etudier, du point de vue de la continuité et de la surjectivité, l'application $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par :

$$f(t) = t \quad \text{si} \quad t \notin \mathbb{Q}\,; \quad f(t) = 1 - t \quad \text{si} \quad t \in \mathbb{Q}.$$

4.03. — Exhiber une application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, discontinue en tout point et bijective.

4.04. — Trouver toutes les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes.

4.05. — Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$.

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x+1/p) = f(x)$.

b) Soit $\lambda \in]0, 1[$, tel que $1/\lambda \notin \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on peut choisir f de façon que :

$$\forall t \in [0, 1-\lambda] \quad f(t+\lambda) \neq f(t).$$

4.06. — Soient f et g deux applications continues de $[0, +1]$ dans $\mathbb{R}$. Etùdier la continuité de l'application

$$u \longmapsto \sup_{t \in [0, +1]} [f(t) + ug(t)]$$

4.07. — Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la suite $[f(nx)]_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. A-t-on : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$?

4.08. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. L'application $g : t \longmapsto f^2(t)$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

4.09. — Etudier, du point de vue de la continuité uniforme la fonction

$$t \longmapsto \frac{1 - \cos 2\pi t}{t^2 \ln t}$$

4.10. — Déterminer une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions : $f(x) \neq 0$ si $x \neq 0$; $f(1) = 1$; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; f(x+y) = f(x) + f(y)$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \; f(1/t) = 1/f(t).$$

On montrera qu'une solution éventuelle est croissante, en étudiant

$$g : t \longmapsto f\left(\frac{1}{t(1-t)}\right)$$

4.11. — Calculer les dérivées des fonctions f définies par :

$$f(t) = \text{Arc}\sin(2t\sqrt{1-t^2})\,; \quad f(t) = \text{Arg}\,\text{tg}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,; \quad f(t) = \text{Arc}\,\text{tg}\,\frac{1}{2t^2}$$

4.12. — Calculer la dérivée n-ième de $t \longmapsto t^{n-1}e^{1/t}$.

4.13. — On considère la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Montrer que la dérivée n-ième de f est de la forme.

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n\sqrt{1+t^2}}$$

où $P_n \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré n.

Prouver les relations :

$$P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - (2n+1)XP_n$$

$$P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0 \qquad (n \geqslant 1)$$

$$(1+X^2)P_n'' - (2n-1)XP_n' + n^2P_n = 0$$

En déduire $P_n = a_0X^n + a_1X^{n-2} + \ldots + a_pX^{n-2p} + \ldots$ avec $a_0 = (-1)^n n!$,

$$a_p = (-1)^{n+p} n! \, \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{4^p(p!)^2}$$

Montrer que les racines de P_n sont réelles et simples.

4.14. — Etudier les dérivées n-ièmes de :

$$t \longmapsto e^{-t^2} \qquad t \longmapsto \ln(1+t^2) - \operatorname{Arc\,tg} t$$

(On pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

4.15. — Calculer la dérivée n-ième de $t \longmapsto e^{t\sqrt{3}} \sin t$

4.16. — Démontrer : $2^{2n+1} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(t^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}} e^{\sqrt{t}}\right) = e^{\sqrt{t}}$.

4.17. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞. Montrer que, pour $t \neq 0$

$$\frac{1}{t^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right) = (-1)^n \left[t^{n-1} f\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{(n)}.$$

4.18. — Soit f une fonction définie dans un voisinage de t_0, admettant une dérivée en t_0. Etudier $\lim\limits_{h \to 0, h \neq 0} \dfrac{f(t_0+h) - f(t_0-h)}{2h}$. Généraliser au cas où f admet en t_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Etudier de même $\lim\limits_{h \to 0, h \neq 0} \dfrac{f(t_0+h) + f(t_0-h) - 2f(t_0)}{h^2}$ en supposant l'existence de $f''(t_0)$.

4.19. — Soit f dérivable au voisinage de t_0, f' étant continue en t_0

Etudier $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (t_0,t_0) \\ x \neq y}} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$.

Peut-on supprimer l'hypothèse f' continue en t_0 ?

4.20. — Trouver toutes les applications dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(1) = 1\,; \quad f'(0) > 0\,; \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) \cdot f'(f(t)) = 1.$$

4.21. — * Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et non nulle telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y) \tag{1}$$

a) Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.

b) Montrer que si f prend la valeur 0, alors f est C^∞.

c) Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (1). *

4.22. – Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application admettant une dérivée à droite en tout point de $[a, b[$. Montrer qu'il existe un sous-intervalle ouvert non vide de $]a, b[$ sur lequel f est continue.

(*Indication* : Sinon on pourrait trouver une suite $((x_n, y_n, z_n))$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$y_{n-1} \leqslant y_n < z_n < x_n \leqslant z_{n-1}, \quad z_n - y_n \leqslant 1/n,$$

et
$$\left|\frac{f(x_n)-f(t)}{x_n - t}\right| > n \text{ pour tout } t \in [y_n, z_n]).$$

4.23. — Soit $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue, et dérivable sur $]a, +\infty[$.

a) Montrer que si $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t} = +\infty$.

b) Si $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t} = 0$.

c) Si $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = l$ $(l \in \mathbb{R}^*)$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t} = l$.

4.24. — Soient E un e.v.n., I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to E$ telles que $f(I) \subset J$. On considère $a \in I$.

a) Montrer que si g est dérivable en $f(a)$, et si $f'_d(a)$ existe, $g \circ f$ admet une dérivée à droite en a, que l'on calculera.

b) On suppose g dérivable à droite en $f(a)$, et f dérivable en a.

i) Montrer que si $f'(a) > 0$ (resp. $f'(a) < 0$) $g \circ f$ admet une dérivée à droite (resp. une dérivée à gauche) que l'on calculera.

ii) On suppose $f'(a) = 0$. Montrer que si g admet une dérivée à droite *et* une dérivée à gauche, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = 0$. (Exemple : $g(u) = |u|$). Montrer que le résultat peut être en défaut lorsque g admet seulement une dérivée à droite *ou* une dérivée à gauche (considérer f définie par $f(0) = 0$ et

$$f(t) = t^2 \sin\frac{1}{t} \ (t \neq 0)$$

et g définie par $g(t) = \sqrt{t}$ $(t \geqslant 0)$, $g(t) = 0$ $(t \leqslant 0)$.

c) Etudier les cas où f et g admettent une dérivée à droite (resp. à gauche).

4.25. — Soit $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(t) = (0, 0) \text{ si } -1 \leqslant t \leqslant 0 \,; \quad f(t) = \left(t^2 \sin\frac{1}{t},\ t^2 \cos\frac{1}{t}\right) \text{ si } 0 < t \leqslant 1.$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $I =]-1, +1[$, et que $f'(I)$ n'est pas connexe.

4.26. — Montrer que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1-t)^2}\right) \quad \text{si } t \in]-1, 1[$$

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{si } t \notin]-1, 1[$$

est de classe C^∞.

4.27. — Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continue en 0, telle que $a = \lim\limits_{t \to 0,\, t > 0} \dfrac{f(2t) - f(t)}{t}$. Montrer que f est dérivable en 0.

4.28. — Soit $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, +\infty[$ et vérifiant $f(a) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

4.29. — Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, telle que $f \geqslant 0$, $f' \geqslant 0$, $f'' \geqslant 0$. Etudier $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t}$; étudier $\lim_{t \to -\infty} f(t)$, $\lim_{t \to -\infty} t f'(t)$, $\lim_{t \to -\infty} t^2 f''(t)$.

4.30. – Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable, positive et bornée. On suppose en outre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \alpha f(t) \leqslant f''(t).$$

Montrer :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad f(t) \leqslant f(0) \exp\left(-t\sqrt{\alpha}\right).$$

4.31. — On donne deux réels a et α, avec $\alpha > 0$, et on considère une application f de classe C^{n+1} de $]a - \alpha, a + \alpha[$ dans $\mathbb{R}$. A tout $x \in]-\alpha, \alpha[$ on associe la partie A_x de $]0, 1[$ constituée par les réels θ vérifiant :

$$f(a + x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a + x\theta)$$

Trouver une condition suffisante pour que, pour $|x|$ assez petit, A_x contienne un élément unique, que l'on notera alors $\theta(x)$. Existe-t-il $\lim_{x \to 0, x \neq 0} \theta(x)$?

4.32. — Montrer que, pour $t \neq 0$ et $|t|$ assez petit, il existe un et un seul $\theta(t) \in]0, 1[$ tel que :

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} \cos\left[t\theta(t)\right].$$

Montrer $\lim_{t \to 0, t \neq 0} \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

4.33. — On se propose de montrer que le théorème des accroissements finis (4.2.*1*) reste vrai si les applications $f : [a, b] \to E$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continues, sont seulement supposées dérivables à droite sur $]a, b[\setminus D$, où D est dénombrable (et donc $\|f'_d(t)\| \leqslant g'_d(t)$ pour tout $t \in]a, b[\setminus D$).

On s'inspirera de la démonstration du cours, en y apportant les modifications suivantes : on introduit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En posant toujours

$$\varphi_\varepsilon(t) = \|f(t) - f(a)\| - g(t) + g(a) - \varepsilon(t - a)$$

on suppose $\alpha \notin \varphi_\varepsilon(D)$. En remplaçant E_ε par $E_{\alpha,\varepsilon} = \{t \in [a, b] \mid \varphi_\varepsilon(t) \leqslant \alpha\}$ on constatera $c = \sup E_{\alpha,\varepsilon} \notin D$ et on achèvera comme dans le cours, en remarquant que $\mathbb{R}_+^* \setminus \varphi_\varepsilon(D)$ est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

4.34. — Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admettant une primitive F. Montrer que f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. (Utiliser les applications

$$\left.\varphi : t \longmapsto \frac{F(t) - F(a)}{t - a} \text{ et } \psi : t \longmapsto \frac{F(t) - F(b)}{t - b}\right).$$

En déduire des exemples de fonctions n'admettant pas de primitives.

4.35. — Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x-y)\cdot f(x+y) \leqslant f^2(x).$$

Montrer : $\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t)\cdot f''(t) \leqslant [f'(t)]^2.$

4.36. — Soit $f: [-a, +a] \to E$ de classe C^2. Montrer :

$$\forall t \in [-a, a] \qquad \|f'(t)\| \leqslant \frac{1}{2a}\|f(a)-f(-a)\| + \frac{a^2+t^2}{2a} \sup_{|x|\leqslant a} \|f''(x)\|.$$

4.37. — Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une application de classe C^2 telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R} \quad |f''(t)| \leqslant M.$

a) Montrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x) + y f'(x) + \frac{y^2}{2} M \geqslant 0.$

b) Montrer : $\forall t \in \mathbb{R} \qquad |f'(t)| \leqslant \sqrt{2M f(t)}.$

4.38. — Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que $f'(a) = 0$ et $f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

4.39. — Déterminer les applications $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, vérifiant la condition :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f(y)f(-y).$$

4.40. — Soit l'équation :

$$\operatorname{Arc\,tg}(t-3) + \operatorname{Arc\,tg} t + \operatorname{Arc\,tg}(t+3) = 5\pi/4.$$

Montrer que 5 est solution et résoudre.

4.41. — Etudier et représenter graphiquement les fonctions :

$$t \longmapsto \operatorname{Arc\,sin}\frac{t+\sqrt{1-t^2}}{2}\,; \qquad t \longmapsto \operatorname{Arc\,tg}\frac{2t}{1-t^2} - 2\operatorname{Arc\,tg} t$$

$$t \longmapsto \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{\frac{1+\sin t}{2}} - \frac{t}{2}\,; \qquad t \longmapsto \operatorname{Arg\,th}\frac{1+3\operatorname{th} t}{3+\operatorname{th} t}.$$

4.42. — On pose :

$$f(t) = \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1/2+\sqrt{t}} + \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{1/2-\sqrt{t}}$$

Etudier l'ensemble : $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = f(y)\}.$

4.43. — Construire la courbe d'équation :

$$y = \operatorname{Arc\,cos}(\cos x) + 1/2\cdot\operatorname{Arc\,cos}(\cos 2x) + 1/6\cdot\operatorname{Arc\,cos}(\cos 3x).$$

4.44. — Etablir les inégalités :

(1) $\qquad t + \frac{1}{3}t^3 \leqslant \operatorname{tg} t \leqslant t + \frac{14}{25}t^3, \qquad t \in [0, 1]$

(2) $|e^t - 1 - t| \leqslant \frac{t^2}{2} e^{|t|}$, $t \in \mathbb{R}$

(3) $\frac{2}{\pi} t < \sin t < t$, $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

(4) $\text{Arc tg}\, t > \frac{t}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$.

(5) $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e < \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t$, $t \in]1, +\infty[$.

4.45. — Discuter les équations à l'inconnue $t \in \mathbb{R}$:

(1) $\text{Arc sin}\,(5t - 20t^3 + 16t^5) = \text{Arc sin}\,(5a - 20a^3 + 16a^5)$

(2) $(a^b)^t = a^{(b^t)}$.

4.46. — Discuter les équations à l'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

(1) $(\text{ch}\, x + \text{sh}\, y = a) \wedge (\text{sh}\, x + \text{ch}\, y = b)$

(2) $(\text{ch}\, x + \text{ch}\, y = a) \wedge (\text{sh}\, x + \text{sh}\, y = b)$.

4.47. — Les équations à l'inconnue $t \in \mathbb{R}$

$$a^t = t \qquad \text{et} \qquad a^{(a^t)} = t$$

ont-elles les mêmes solutions ?

4.48. — Discuter, suivant $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, l'équation à l'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

a) $\text{ch}\, x + \cos y = \frac{\text{sh}\, x}{a} + \frac{\sin y}{b}$; *b*) $a^x = x^b$.

Fonctions convexes.

4.49. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x) + f(y)].$$

Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

4.50. — Montrer que toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée est constante. Le résultat reste-t-il valable pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$?

4.51. — Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, convexe, croissante et non constante.

Montrer : $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

4.52. — Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $\frac{f(t)}{t}$ admet une limite finie ou tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Montrer que si $l = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t}$ $(l \in \mathbb{R})$, alors $f(t) - lt$ admet une limite finie ou tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

4.53. — Soit $t \in]0, 1[$. Montrer pour $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$:

$$u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$$

(utiliser la fonction logarithme).

En déduire que, si $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ sont deux familles de réels positifs,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/t}\right)^t \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{1/(1-t)}\right)^{1-t}.$$

Fonctions a variations bornées

4.54. — Soient $f : [a, b] \to E$ et $\Sigma(a, b)$ l'ensemble des suites finies strictement croissantes de $[a, b]$. On dit que f est à variation bornée si et seulement si les sommes $\sum_{i=1}^{n} \|f(t_i)-f(t_{i-1})\|$, où $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$, sont majorées lorsque σ décrit Σ. Leur borne supérieure, notée $V_{a,b}(f)$, est appelée variation totale de f sur $[a, b]$.

a) Montrer que si f est de classe C^1, elle est à variation bornée.

Donner un exemple de fonction continue sur $[0, 1]$, qui n'est pas à variation bornée.

b) On suppose $E = \mathbb{R}$. Montrer que si f est monotone, elle est à variation bornée. Inversement soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ à variation bornée. Montrer que la restriction de f à $[a, t]$ est encore à variation bornée et que $\varphi : t \longmapsto V_{a,t}(f)$ (variation totale de la restriction de f à $[a, t]$) est une application croissante.

Montrer que $f-\varphi$ est décroissante. En déduire le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a, b]}$ engendré par l'ensemble des fonctions monotones.

c) Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, à variation bornée, est continue, f peut s'écrire $f = \varphi - \psi$, où φ et ψ sont croissantes et continues.

4.55. — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, telle que $0 = \lim_{n \to +\infty} a_n$. On définit une application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$: f est affine sur $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]$ $(n \geqslant 2)$, $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0$ $(n \geqslant 0)$, $f\left(\frac{1}{2n}\right) = a_n$ $(n \geqslant 1)$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.

b) Montrer que $f = g + h$, où g est croissante, h décroissante.

c) On suppose $a_n = (1/2)^n$. Montrer que g et h admettent une limite pour t tendant vers 0 par valeurs supérieures.

d) Etudier le cas $a_n = 1/n$.

Phénomène de Runge

4.56. — Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = 1/(t^2 + \alpha^2), \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixé.}$$

Pour tout entier pair $n = 2m$, $m \geqslant 1$, on définit la famille $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ par :

$$a_k = \frac{2k-1}{2m} - 1, \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2m$$

et on désigne par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f, relativement à cette famille; N_n désigne le polynôme $\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$.

1° Vérifier :

$$\forall t \in [-1, 1] \qquad f(t) - P_n(t) = \frac{N_n(t)}{N_n(i\alpha)\cdot(t^2+\alpha^2)}$$

2° Vérifier :

$$\ln |N_{2m}(i\alpha)| = \sum_{k=1}^{m} \ln\left(\alpha^2 + \left(\frac{2k-1}{2m}\right)^2\right)$$

En déduire l'existence et la valeur de :

$$\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{m} \ln |N_{2m}(i\alpha)|\right)$$

3° Existe-t-il $\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{m} \ln |N_{2m}(1)|\right)$?

4° Montrer qu'il existe des $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour la fonction f associée à α, la suite $(P_n(1))_{n \in 2\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers $f(1)$. Déterminer la partie de $\mathbb{R}_+^*$ constituée par ces réels α.

(On n'abordera cet exercice qu'après avoir étudié le chapitre **6**, qui concerne l'intégration.)

5
ÉTUDE PRATIQUE D'UNE FONCTION RÉELLE

Introduction

1° Nous ne reviendrons pas sur les généralités concernant l'étude d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, que le lecteur connaît depuis les classes secondaires, à savoir :

— l'utilisation éventuelle de la *parité* ou de la *périodicité*[1] pour se ramener à l'étude de la fonction f sur un sous-ensemble de son ensemble de définition (qui sera noté D_f ou Déf (f)) ;

— l'utilisation de la *dérivée* pour étudier le *sens de variation* d'une fonction (par application du théorème du **4**.3.*3*, 2°) dans des sous-intervalles de D_f ;

— l'utilisation des *limites* pour étudier ce qui se passe aux bornes de ces sous-intervalles.

2° Nous serons amenés à tracer des *courbes représentatives*. Bornons-nous à affirmer (quitte à le vérifier par la suite) que nous ne serons pas en contradiction avec les définitions données dans le cours de Géométrie en considérant que le graphe de f :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in D_f) \wedge (y = f(x)\}$$

• admet une *tangente* en tout point $(a, f(a))$ tel que f soit dérivable en a, à savoir la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y - f(a) = (x-a)\,f'(a)$;

• admet pour asymptote :

— la droite $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a \ x \neq a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$),

— la droite $y = b$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ [resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$],

— la droite $y = cx + d$, $[(c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}]$ si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - cx - d) = 0 \quad \left[\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - cx - d) = 0\right].$$

---

[1] Nous nous plaçons ici dans le cas où il existe une *plus petite période strictement positive*, qui — abréviativement — sera appelée période (sans oublier qu'il existe des fonctions périodiques — telles les constantes, ou encore la fonction caractéristique des rationnels — qui n'admettent pas de plus petite période positive).

— Nous donnant un plan affine P et un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ de P — il s'agira en général d'un plan euclidien et d'un repère orthonormal — nous appellerons *représentation graphique* de f l'image C de Γ par la bijection :

$$(x, y) \longmapsto O + x\vec{i} + y\vec{j}$$

de $\mathbb{R}^2$ sur P, l'image d'une tangente [resp. asymptote] de Γ par cette bijection étant, naturellement, appelée tangente [resp. asymptote] de C. Nous dirons enfin que C est la *courbe* de P dont une équation est $y = f(x)$. Il nous arrivera d'identifier Γ et C.

— Rappelons pour terminer que si la fonction f est bijective, ce qui permet de définir f^{-1}, on passe de la représentation graphique de f à celle de f^{-1}, dans le même plan P rapporté à $(0, \vec{i}, \vec{j})$, par symétrie par rapport à la droite d'équation $y - x = 0$, dans la direction de la droite $y + x = 0$ (symétrie orthogonale dans le cas où P est euclidien et $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal).

5.1 COMPARAISON DES FONCTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT

En analyse, on a souvent besoin de connaître l'« allure d'une fonction au voisinage d'un point ». Nous allons préciser ce qu'on entend par là et, pour cela, choisir des notations qui permettront d'éviter la multiplication des cas particuliers.

La partie théorique du présent 5.1. *vaut pour des fonctions d'un e.v.n. vers un e.v.n.*

5.1.*1*. Fonctions définies au voisinage d'un point

1° *Notations.* — Dans ce sous-chapitre, nous considérons comme donnés un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et une partie $A \subset \mathbb{R}$ telle que $a \in \overline{A}$, ce qui implique $A \neq \emptyset$. Nous désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble :

$$\mathcal{B} = \{ V \cap A \mid V \in \mathcal{V}(a) \}$$

constitué par les traces sur A des voisinages de a dans $\overline{\mathbb{R}}$.

$\mathbb{K}$ désignant l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à tout $\mathbb{K}$-e.v.n. E non réduit à $\{0\}$ nous associons l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers E dont l'ensemble de définition contient un élément de $\mathcal{B}$ (qui dépend de la fonction considérée). Nous écrisons $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ pour $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{K})$.

2° THÉORÈME. — **La relation $\mathcal{R}$ définie par « $f \mathcal{R} g$ signifie qu'il existe un élément de $\mathcal{B}$ sur lequel f et g sont définies et égales » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$.**

Démonstration immédiate. □

DÉFINITION. — **Une relation qui fait intervenir des éléments de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ est dite de caractère local suivant $\mathcal{B}$ lorsqu'elle est compatible avec $\mathcal{R}$, ce qui signifie que, si elle est vraie pour des fonctions $f, g, \ldots$ elle l'est pour toutes fonctions $f_1, g_1, \ldots$ respectivement équivalentes modulo $\mathcal{R}$ à $f, g, \ldots$**

Aux **5.1.2**, **5.1.3**, **5.1.4** nous allons introduire des relations binaires sur $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$. Le lecteur vérifiera qu'elles sont de caractère local.

3° REMARQUES. — *a*) Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble A, on peut dire que *$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow E$ définies au voisinage de a, que $\mathcal{R}$ est l'égalité au voisinage de a*, et parler de *relations de caractère local au voisinage de a.*

b) $\mathcal{B}$ est une *base de filtre* au sens du **2.2.5**. Bien que cela serait possible, nous n'étendrons cependant pas **5.1** au cas où $\mathcal{B}$ est une base de filtre quelconque.

Mieux, le lecteur pourra étudier 5.1 sans connaître la notion de base de filtre; il lui suffira de lire $\lim\limits_{t \to a, t \in A}$ toutes les fois que le texte mentionne $\lim\limits_{\mathcal{B}}$ (cette possibilité s'expliquant ici par 2.2.5, 2°), et de lire « au voisinage de a » au lieu de « suivant $\mathcal{B}$ ».

c) Nous n'étendrons **5.1** qu'au cas de fonctions définies sur un e.v.n. Il suffit de reprendre les notations du 1° en remplaçant $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ par cet e.v.n. Les deux remarques précédentes restent valables.

5.1.2. La relation de domination

1° DÉFINITION. — **Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$. On dit que f est dominée par g suivant $\mathcal{B}$, et on écrit :**

$$f \preccurlyeq g \textbf{(notation de Hardy), ou } f = O(g) \textbf{ (notation de Landau)}$$ [1]

si, et seulement s'il existe $X \in \mathcal{B}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que f et g soient définies sur X et que :

$$\forall t \in X \qquad \| f(t) \| \leqslant \alpha \| g(t) \|.$$

Notons que tout zéro de g sur X est alors un zéro de f.

EXEMPLES. — *a*) L'application nulle $A \to E$ est dominée par toute fonction de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$;

b) $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ est dominée par la fonction nulle si, et seulement s'il existe $X \in \mathcal{B}$ tel que la restriction de f à X soit nulle.

2° ***Propriétés de la relation de domination.*** — PROPOSITION I. — **La relation de domination est un préordre.**

La réflexivité est triviale. La transitivité résulte de ce que l'hypothèse :

$$\begin{cases} \exists\, X \in \mathcal{B} \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, t \in X \qquad \|f(t)\| \leqslant \alpha\, \|g(t)\| \\ \exists\, Y \in \mathcal{B} \quad \exists\, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, t \in Y \qquad \|g(t)\| \leqslant \beta\, \|h(t)\| \end{cases}$$

entraîne, en posant $X \cap Y = Z$ et $\alpha\beta = \gamma$, la conclusion :

$$\exists\, Z \in \mathcal{B} \quad \exists\, \gamma \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, t \in Z \qquad \|f(t)\| \leqslant \gamma\, \|h(t)\|. \qquad \square$$

REMARQUE. — Nous utilisons le fait que l'intersection de deux éléments X et Y de $\mathcal{B}$ est ici un élément de $\mathcal{B}$.

---

(1) Lorsqu'interviennent en même temps plusieurs fonctions $f_1, f_2, \ldots$, dominées par une fonction g, le lecteur débutant aura intérêt à écrire $f_1 = O_1(g)$, $f_2 = O_2(g)$, ...

PROPOSITION II. — **Pour tous f, g, h dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ et tout scalaire λ :**

$i)$ $(f = O(h)$ et $g = O(h)) \implies (f+g = O(h))$

$ii)$ $(f = O(h)) \implies (\lambda f = O(h))$.

$ii)$ est trivial ; $i)$ résulte de ce que l'hypothèse :

$$\begin{cases} \exists\, X \in \mathcal{B} \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, t \in X \qquad \|f(t)\| \leqslant \alpha\, \|h(t)\| \\ \exists\, Y \in \mathcal{B} \quad \exists\, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, t \in Y \qquad \|g(t)\| \leqslant \beta\, \|h(t)\| \end{cases}$$

entraîne, en posant $Z = X \cap Y$ et $\gamma = \alpha+\beta$:

$$\exists\, Z \in \mathcal{B} \quad \exists\, \gamma \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, t \in Z \qquad \|(f+g)(t)\| \leqslant \gamma\, \|h(t)\|. \qquad \square$$

Compte tenu de $0 = O(h)$, on déduit de la proposition II :

COROLLAIRE. — Etant donné $h \in \mathcal{F}(A, E)$, l'ensemble des applications de A dans E dominées par h est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, E)$.

• En raisonnant comme ci-dessus on démontre ensuite :

PROPOSITION III. — **Pour tous φ, ψ dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ et tous f, g dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$:**

$$(\varphi = O(\psi) \text{ et } f = O(g)) \implies (\varphi f = O(\psi g)).$$

En particulier, pour tous f_1, f_2, g_1, g_2 dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$:

$$(f_1 = O(g_1) \text{ et } f_2 = O(g_2)) \implies (f_1 f_2 = O(g_1 g_2)).$$

PROPOSITION IV. — **Pour tous f et g dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$, si $f = O(g)$ et si $\lim\limits_{\mathcal{B}} g = 0$, alors $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = 0$.**

Simple conséquence de la définition du 1°.

3° EXTENSION DE LA DÉFINITION. — **On considère ici deux e.v.n. E et F. Soient $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ et $g \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(F)$. On dit que f est dominée par g suivant $\mathcal{B}$, et on écrit $f \preccurlyeq g$ où $f = O(g)$ si, et seulement si $\|f\|$ est dominée par $\|g\|$ dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.**

EXEMPLE. — $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ est dominée par la fonction constante $t \longmapsto 1$, ce qui s'écrit $f = O(1)$, si, et seulement s'il existe $X \in \mathcal{B}$ tel que la restriction de f à X soit bornée.

4° ***La relation de similitude.*** — DÉFINITION. — **On dit que deux fonctions f et g de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ sont semblables suivant $\mathcal{B}$ si, et seulement si chacune d'elles est dominée par l'autre.**

Cela se traduit par l'existence de $X \in \mathcal{B}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que f et g soient définies sur X et que :

$$\forall\, t \in X \qquad \beta\|g(t)\| \leqslant \|f(t)\| \leqslant \alpha\|g(t)\|$$

Le lecteur vérifiera que la similitude est une relation d'équivalence dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$. Il remarquera que si f et g sont semblables, alors il existe $X \in \mathcal{B}$ sur lequel f et g ne peuvent s'annuler que simultanément.

5.1.3. La relation de prépondérance

1° DÉFINITION. — **Soient f et g des fonctions de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$. On dit que f est négligeable devant g, ou que g est prépondérante devant f, suivant $\mathcal{B}$, et on écrit :**

$$f \ll g \text{ (notation de Hardy), ou } f = o(g) \text{ (notation de Landau)}$$

si, et seulement si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $X \in \mathcal{B}$ tel que f et g soient définies sur X et que :

$$\forall\, t \in X \qquad \|f(t)\| \leqslant \varepsilon\, \|g(t)\|.$$

EXEMPLES. — *a*) L'application nulle $A \to E$ est négligeable devant toute fonction de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$.

b) $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ est négligeable devant la fonction nulle (resp. devant elle-même) si, et seulement s'il existe $X \in \mathcal{B}$ tel que la restriction de f à X soit nulle.

2° ***Propriétés de la relation de prépondérance.*** — PROPOSITION I. — **La relation de prépondérance est transitive, non réflexive.**

PROPOSITION II. — **Pour tous f, g, h dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ et tout scalaire λ :**

i) $(f = o(g)) \implies (f = O(g))$

ii) $(f = o(g)$ et $g = O(h)) \implies (f = o(h))$

iii) $(f = O(g)$ et $g = o(h)) \implies (f = o(h))$

iv) $(f = o(h)$ et $g = o(h)) \implies (f+g = o(h))$

v) $(f = o(h)) \implies (\lambda f = o(h))$.

COROLLAIRE. — **Étant donnée $h \in \mathcal{F}(A, E)$, l'ensemble des applications de A dans E négligeables devant h est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, E)$.**

PROPOSITION III. — **Pour tous φ, ψ dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ et f, g dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$:**

i) $(\varphi = o(\psi)$ et $f = O(g)) \implies (\varphi f = o(\psi g))$

ii) $(\varphi = O(\psi)$ et $f = o(g)) \implies (\varphi f = o(\psi g))$.

En particulier, pour tous f_1, f_2, g_1, g_2 dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$:

$$(f_1 = o(g_1) \text{ et } f_2 = O(g_2)) \implies (f_1 f_2 = o(g_1 g_2)).$$

A titre d'exemple, donnons la démonstration du II, *ii*), celles des autres propositions étant laissées au lecteur :

De $g = O(h)$, on déduit l'existence de $X \in \mathcal{B}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall\, t \in X \qquad \|g(t)\| \leqslant \alpha\, \|h(t)\|.$$

D'après $f = o(g)$, à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on peut associer $Y \in \mathcal{B}$ tel que :

$$\forall\, t \in Y \qquad \|f(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}\, \|g(t)\|.$$

En posant $Z = X \cap Y$, on constate :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists Z \in \mathcal{B} \quad \forall t \in Z \qquad \|f(t)\| \leqslant \varepsilon \, \|h(t)\|. \qquad \square$$

3° Extension de la définition. — **Soient $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ et $g \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(F)$. On dit que f est négligeable devant g suivant $\mathcal{B}$, et on écrit $f \ll g$ où $f = o(g)$ si, et seulement si $\|f\|$ est négligeable devant $\|g\|$ suivant $\mathcal{B}$, dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.**

Proposition. — **Soient $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ et $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) $f = o(\varphi)$

ii) **Il existe une fonction $\omega \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ vérifiant $f = \varphi\, \omega$ et $\lim\limits_{\mathcal{B}} \omega = 0$,**

ii) $\Longrightarrow$ *i)*. Trivial.

i) $\Longrightarrow$ *ii)* L'hypothèse est $f = o(\varphi)$. En utilisant $f = O(\varphi)$, on constate (**5**.1.*2*, 1°) l'existence de $X \in \mathcal{B}$ sur lequel f et φ sont définis, tout zéro de φ sur X étant en outre zéro de f. Nous disposons de $\omega \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$, définie sur X par :

$$\omega(t) = \frac{f(t)}{\varphi(t)} \text{ si } \varphi(t) \neq 0\,; \qquad \omega(t) = 0 \text{ si } \varphi(t) = 0.$$

On constate : $\forall t \in X \quad f(t) = \varphi(t)\omega(t)$; ainsi $f = \varphi\omega$ (sur X).

Ceci dit, d'après $f = o(\varphi)$ on peut associer à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ un $Y \in \mathcal{B}$ tel que :

$$\forall t \in Y \qquad \|f(t)\| \leqslant \varepsilon \mid \varphi(t)|.$$

On a : $\quad \forall t \in X \cap Y \qquad |\varphi(t)| \; \|\omega(t)\| \leqslant \varepsilon \; |\varphi(t)|.$

En étudiant successivement les cas $\varphi(t) \neq 0$ et $\varphi(t) = 0$, on en déduit :

$$\forall t \in X \cap Y \qquad \|\omega(t)\| \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion $\lim\limits_{\mathcal{B}} \omega = 0$. $\square$

Exemple. — $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ est négligeable devant la fonction constante $t \longmapsto 1$, ce qui s'écrit $f = o(1)$, si et seulement si $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = 0$

5.1.*4*. L'équivalence des fonctions

1° Théorème et définition. — **Sur $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$, la relation binaire « $f \sim g$ », qui signifie « $f-g$ est négligeable devant g suivant $\mathcal{B}$ », est une relation d'équivalence, que l'on appelle équivalence suivant $\mathcal{B}$.**

Réflexivité. — Résulte de ce que la fonction nulle est négligeable devant toute fonction de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$.

Symétrie. — Partons de l'hypothèse : $f-g = o(g)$.

— Montrons d'abord $g = O(f)$. Pour cela choisissons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $\varepsilon < 1$; nous pouvons lui associer $X \in \mathcal{B}$ tel que :

$$\forall t \in X \qquad \| f(t)-g(t)\| \leqslant \varepsilon \, \|g(t)\|.$$

En utilisant $\|g(t)\| \leqslant \|f(t)\| + \|f(t)-g(t)\|$, et en posant $\alpha = 1/(1-\varepsilon)$, il vient :

$$\exists\, X \in \mathcal{B} \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall\, t \in X \qquad \|g(t)\| \leqslant \alpha\, \|f(t)\|.$$

— De $f-g = o(g)$ et $g = O(f)$, nous déduisons : $f-g = o(f)$. □

Transitivité. — L'hypothèse est : $f-g = o(g)$ et $g-h = o(h)$.

Etant donné que : $f-h = (f-g)+(g-h)$, il reste à prouver que $f-g = o(h)$. Compte tenu de $f-g = o(g)$, cela résulte de $g = O(h)$, qui est lui-même une conséquence de $g-h = o(h)$. □

Remarques. — *a*) Les définitions de la domination et de la prépondérance, et donc celle de l'équivalence, font intervenir le choix de la norme sur l'espace vectoriel E. Cependant si l'on remplace la norme initiale par une norme équivalente, les relations ($\preccurlyeq$), ($\ll$) et ($\sim$) relatives à la nouvelle norme coïncident avec les relations relatives à la norme initiale.

b) Par abus de langage, nous noterons souvent $f(t) = O(g(t))$, $f(t) = o(g(t))$ ou $f(t) \sim g(t)$, pour $f = O(g)$, $f = o(g)$ ou $f \sim g$.

C'est ainsi que l'on a :

Au voisinage de $+\infty$:	$(\ln t)^\alpha = o(t^\beta)$, $((\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2)$
Au voisinage de 0 :	$\lvert\ln t\rvert^\alpha = o(t^{-\beta})$, $((\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2)$
Au voisinage de $-\infty$:	$a^t = o(\lvert t\rvert^\alpha)$, $(\alpha \in \mathbb{R},\ a > 1)$.

Exemples. — *a*) Etant donné $l \in E \backslash \{0\}$, la fonction $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ est équivalente à la fonction $t \longmapsto l$ si, et seulement si $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = l$.

b) $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ est équivalente à la fonction nulle si, et seulement si f est négligeable devant la fonction nulle, c'est-à-dire si, et seulement s'il existe $X \in \mathcal{B}$ tel que la restriction de f à X soit nulle.

2° ***Propriétés de la relation d'équivalence.*** — Proposition I. — **Soient f et g des éléments de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$, tels que $f \sim g$ et que g admette une limite $l \in E$, suivant $\mathcal{B}$. Alors f admet l pour limite suivant $\mathcal{B}$.**

L'existence de l implique celle de $X_0 \in \mathcal{B}$, telle que la restriction de g à X_0 soit bornée ; désignons par M un majorant de $\|g(t)\|$ sur X_0.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. L'hypothèse permet de lui associer $Y \in \mathcal{B}$ et $Z \in \mathcal{B}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall\, t \in Y & \|f(t) - g(t)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}\, \|g(t)\| \\[2ex] \forall\, t \in Z & \|g(t) - l\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

En utilisant : $\|f(t)-l\| \leqslant \|f(t)-g(t)\| + \|g(t)-l\|$.

on en déduit : $\quad \forall\, t \in (Y \cap Z) \qquad \|f(t) - l\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\left(\dfrac{1}{M}\,\|g(t)\| + 1\right)$

et : $\quad \forall\, t \in (X_0 \cap Y \cap Z) \qquad \|f(t)-l\| \leqslant \varepsilon$ □

Proposition II. — **Pour tous φ, ψ dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ et f, g dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$:**

$$(\varphi \sim \psi \quad \text{et} \quad f \sim g) \quad \Longrightarrow \quad (\varphi f \sim \psi g).$$

Etant donné que : $\varphi f - \psi g = \varphi(f-g)+(\varphi-\psi)g$,
il suffit de vérifier : $\varphi(f-g) = o(\psi g)$ et $(\varphi-\psi)g = o(\psi g)$.

La dernière égalité résulte de : $\varphi-\psi = o(\psi)$ et $g = O(g)$.

Compte tenu de ce que $\varphi \sim \psi$ entraîne $\varphi = O(\psi)$, l'égalité $\varphi(f-g) = o(\psi g)$ résulte de : $f-g = o(g)$. □

PROPOSITION III. — **Dans chacune des relations $(\preccurlyeq), (\ll)$ et $(\sim)$, on peut remplacer l'une des fonctions qui interviennent par une fonction équivalente.**

C'est ainsi que si $f = o(g)$, $f_1 \sim f$ et $g_1 \sim g$, alors $f_1 = o(g_1)$. Démonstration laissée au lecteur. □

PROPOSITION IV. — **Pour tous** $f, g \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$: $(f \sim g) \Rightarrow (\|f\| \sim \|g\|)$. Simple conséquence de $|\|f\| - \|g\|| \leqslant \|f - g\|$. □

3° ***Cas des fonctions à valeurs dans*** $\mathbb{K}$. — De la proposition du **5.1.3**, 3° on déduit :

THÉORÈME. — **Soient f et g des fonctions de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) $f \sim g$.

ii) **Il existe une fonction $\omega \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ vérifiant $f = (1+\omega)g$ et $\lim_{\mathcal{B}} \omega = 0$**

D'où les conséquences immédiates :

COROLLAIRE I. — **Soient f et g des fonctions équivalentes de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$. Il existe $X_0 \in \mathcal{B}$ sur lequel $\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} g$.**

COROLLAIRE II. — **Soient f et g des fonctions de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ telles qu'il existe $X_0 \in \mathcal{B}$ sur lequel g ne prend pas la valeur 0. Alors :**

a) $(f \sim g) \Longleftrightarrow (\lim_{\mathcal{B}} f/g = 1)$

b) **Si $f \sim g$, alors $(1/f) \sim (1/g)$.**

REMARQUE. — Si deux fonctions de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ sont équivalentes et si l'une d'elles tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), il en est de même de l'autre.

EXEMPLES. — *a*) Est équivalente à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, au voisinage de 0, toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivable au point 0, et telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Il en est ainsi pour chacune des fonctions :

sin; Arc sin; tg; Arc tg; sh; Arg sh; th; Arg th

$t \longmapsto \ln(1+t)$; $t \longmapsto e^t - 1$.

b) On montre de la même façon que $t \longmapsto \ln t$ et $t \longmapsto t-1$ sont équivalentes au voisinage de 1.

— On déduit de la proposition II du 2° et du corollaire I du 3° :

PROPOSITION I. — *a*) **Toutes les fonctions appartenant à $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$:**

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall i \in \mathbb{N}_n \quad f_i \sim g_i) \Longrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} f_i \sim \prod_{i=1}^{n} g_i\right)$$

En particulier : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \qquad (f \sim g) \Longrightarrow (f^n \sim g^n)$.

Notons que le corollaire II. *b*) et la proposition I *a*) permettent de traiter le cas du quotient.

b) **Soient f et g des fonctions équivalentes de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $X_0 \in \mathcal{B}$ sur lequel g (et donc f) ne prenne que des valeurs positives (resp. strictement positives). Alors :**

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \qquad f^\alpha \sim g^\alpha \qquad \text{[resp. } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f^\alpha \sim g^\alpha\text{]}.$$

Nous traduirons ces résultats en disant que les *notions de produit et de quotient sont stables dans l'équivalence.*

EXEMPLE. — En utilisant l'exemple précédent, on a, au voisinage de 0 :

$$1-\cos(2t) = 2\sin^2 t \sim 2t^2; \qquad \operatorname{ch}(2t)-1 = 2\operatorname{sh}^2 t \sim 2t^2.$$

— Voici maintenant deux résultats importants :

PROPOSITION II. — **Pour tous f et g dans $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$,**

$$(e^f \sim e^g) \iff (\lim_{\mathcal{B}}(f-g) = 0).$$

Il s'agit d'une simple conséquence du corollaire II, *a*). L'étude de $f(t) = t^2+t$ et $g(t) = t^2$ au voisinage de $+\infty$ montre qu'on peut avoir $f \sim g$ sans avoir $e^f \sim e^g$.

PROPOSITION III. — **Soient f et g des fonctions équivalentes de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que g admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{1\}$. Alors : $\ln f \sim \ln g$.**

On peut se limiter aux restrictions de f et g à $X_0 \in \mathcal{B}$ sur lequel g ne prend pas la valeur 1, et écrire

$$\frac{\ln f}{\ln g} - 1 = \frac{\ln(f/g)}{\ln g}$$

En convenant que $1/\ln l$ désigne 0 si $l = 0$ ou si $l = +\infty$ (ce qui correspond aux cas usuels d'application de la proposition), on a :

$$\lim f/g = 1, \quad \lim(1/\ln g) = 1/\ln l$$

et donc
$$\lim(\ln f/\ln g) = 1. \qquad \square$$

4° ***Non stabilité de la somme dans l'équivalence.*** — Elle est mise en évidence par le contre-exemple suivant :

$$a = 0;\ A = \mathbb{R};\ E = \mathbb{R};\ f_1(t) = 1+t;\ g_1(t) = 1;\ f_2(t) = -1;\ g_2(t) = -1,$$

dans lequel ($f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$) est vrai, mais ($f_1+f_2 \sim g_1+g_2$) est faux.

On doit se contenter du résultat suivant :

PROPOSITION. — **Soient f_1, g_1, f_2, g_2 des fonctions de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ telles que $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$.**

i) **Si $g_2 = o(g_1)$, alors : $f_1+f_2 \sim g_1$;**

ii) **S'il existe un scalaire α, différent de -1, tel que $g_2 \sim \alpha g_1$, alors : $f_1+f_2 \sim (1+\alpha)g_1$;**

iii) **Si $g_2 \sim -g_1$, alors $f_1+f_2 = o(g_1)$.**

i) Etant donné que : $(f_1+f_2)-g_1 = (f_1-g_1)+(f_2-g_2)+g_2$, il suffit de vérifier :

$$f_1-g_1 = o(g_1)\,;\; f_2-g_2 = o(g_1)\,;\; g_2 = o(g_1).$$

La première et la dernière de ces égalités traduisent des hypothèses ; la seconde résulte de : $f_2-g_2 = o(g_2)$ et $g_2 = O(g_1)$. □

ii) et *iii*) Démonstrations analogues à partir de :

$$f_1+f_2-(1+\alpha)g_1 = (f_1-g_1)+(f_2-g_2)+(g_2-\alpha g_1).$$ □

EXEMPLES. — *a*) *Au voisinage de* $+\infty$: $\text{ch}\, t \sim e^t/2$ et $\text{sh}\, t \sim e^t/2$;
au voisinage de $-\infty$: $\text{ch}\, t \sim e^{-t}/2$ et $\text{sh}\, t \sim -e^{-t}/2$.

b) Soit la fonction polynôme (non nulle) d'une variable réelle :

$$P(t) = \sum_{k=m}^{n} a_k t^k, \quad (0 \leqslant m \leqslant n,\ a_m \neq 0,\ a_n \neq 0)$$

de valuation m, et de degré n. On constate aisément que :

Au voisinage de 0 : $\forall k \in \mathbb{N}$ $t^{k+1} = o(t^k)$

Au voisinage de $+\infty$ *ou* $-\infty$: $\forall k \in \mathbb{N}$ $t^k = o(t^{k+1})$.

En utilisant la proposition précédente, on en déduit :

Au voisinage de 0 : $P(t) \sim a_m t^m$

Au voisinage de $+\infty$ *ou* $-\infty$: $P(t) \sim a_n t^n$.

Notons que le résultat s'étend au cas où les coefficients a_k appartiendront à un e.v.n.

c) Soit la fonction rationnelle $R(t) = P(t)/Q(t)$, avec :

$$P(t) = \sum_{k=m}^{n} a_k t^k, \quad Q(t) = \sum_{k=m'}^{n'} b_k t^k \quad \begin{cases} 0 \leqslant m \leqslant n, & a_m \neq 0,\ a_n \neq 0 \\ 0 \leqslant m' \leqslant n', & b_{m'} \neq 0,\ b_{n'} \neq 0 \end{cases}$$

L'ensemble des zéros de Q est fini, ce qui permet de définir $1/Q$ au voisinage de 0 (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) et d'écrire :

Au voisinage de 0 : $R(t) \sim a_m/b_{m'} t^{m-m'}$

Au voisinage de $+\infty$ *ou* $-\infty$: $R(t) \sim a_n/b_{n'} t^{n-n'}$.

d) Montrons que, *au voisinage de* $+\infty$: $\text{Arg ch}\, t \sim \ln t$.

On part de : $\text{Arg ch}\, t = \ln(t + \sqrt{t^2-1})$; on utilise $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t+\sqrt{t^2-1}}{2t} = 1$.

D'où : $\text{Arg ch}\, t \sim \ln t + \ln 2$. Comme : $\ln 2 = o(\ln t)$, on peut utiliser *i*). □

On montre de même que, *au voisinage de* $+\infty$: $\text{Arg sh}\, t \sim \ln t$.

• Voici cependant un cas « favorable ».

PROPOSITION. — **Soient f_1, g_1, f_2, g_2 des fonctions de $\mathcal{F}_{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $X_0 \in \mathcal{B}$ sur lequel $g_1 > 0$ et $g_2 > 0$. Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1+f_2 \sim g_1+g_2$.**

En effet : $f_1 = g_1(1+\omega_1)$, $f_2 = g_2(1+\omega_2)$ avec $\lim\limits_{\mathscr{B}} \omega_1 = 0$, $\lim\limits_{\mathscr{B}} \omega_2 = 0$

On peut écrire : $f_1+f_2 = (g_1+g_2)\,(1+\omega)$ avec $\omega = \dfrac{\omega_1 g_1+\omega_2 g_2}{g_1+g_2}$

On a : $|\omega_1 g_1+\omega_2 g_2| \leqslant |\omega_1|g_1+|\omega_2|g_2$, et donc $|\omega| \leqslant \max(|\omega_1|, |\omega_2|)$

On en déduit : $\lim\limits_{\mathscr{B}} \omega = 0$.

5° ***Changement de variables dans une relation de comparaison.*** — Soient A et A' deux parties de $\mathbb{R}$, a et a' deux points de $\overline{\mathbb{R}}$ respectivement adhérents à A et A' ; on considère les bases de filtre

$$\mathscr{B} = \{V \cap A \,|\, V \in \mathscr{V}(a)\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}' = \{V' \cap A' \,|\, V' \in \mathscr{V}(a')\}.$$

Soit en outre une fonction φ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $B' \in \mathscr{B}'$, $\varphi^{-1}(B')$ soit un élément de $\mathscr{B}$ (c'est le cas avec $A = A' = \mathbb{R}$, φ continue en a, et $a' = \varphi(a)$). Alors si E est un e.v.n. et si f et g sont des fonctions de $\mathscr{F}_{\mathscr{B}'}(E)$ telles que $f = O(g)$ (resp. $f = o(g)$) (resp. $f \sim g$) alors $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ sont des fonctions de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ telles que

$$f \circ \varphi = O(g \circ \varphi) \text{ (resp. } f \circ \varphi = o(g \circ \varphi)) \text{ (resp. } f \circ \varphi \sim g \circ \varphi));$$

en outre il est clair que si f et g sont égales au voisinage de a', alors $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ sont égales au voisinage de a.

Nous laissons les vérifications au lecteur.

EXEMPLE. — On sait que, au voisinage de 0 : $1-\cos 2t \sim 2t^2$. Par le changement de variable $t \longmapsto t/2$, on en déduit que, au voisinage de 0 : $1-\cos t \sim t^2/2$.

5.2. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Nous reprenons les notations du 5.1.*1*

5.2.*1*. Echelles de comparaison

1° DÉFINITION. — **On appelle échelle de comparaison relativement à la base de filtre $\mathcal{B}$ toute famille $\mathcal{E} = (\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de fonctions de $\mathcal{F}_{\mathscr{B}}$ vérifiant les conditions :**

i) **Pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $X \in \mathcal{B}$, il existe au moins un $t \in X$ tel que $\varphi_\lambda(t) \neq 0$.**

ii) **Pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$ tel que $\lambda \neq \mu$, l'une des fonctions φ_λ ou φ_μ est négligeable devant l'autre.**

On dit que l'échelle $\mathcal{E}$ est stable (par produit) lorsque, pour tout $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$, le produit $\varphi_\lambda \varphi_\mu$ est une fonction de $\mathcal{E}$.

REMARQUES. — *a*) Daprès *i*) la fonction nulle n'appartient pas à la famille $\mathcal{E}$.

b) D'après *ii*) la famille $\mathcal{E}$ est injective, puisque si on avait $\varphi_\lambda = \varphi_\mu$ avec $\lambda \neq \mu$, on aurait $\varphi_\lambda = o(\varphi_\lambda)$, en contradiction avec *i*).

Toute sous-famille $\mathcal{E}'$ d'une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ est, elle-même, une échelle de comparaison ; on dit que $\mathcal{E}'$ est une sous-échelle de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}'$ *moins fine* que $\mathcal{E}$.

EXEMPLES. — Le lecteur vérifiera aisément que les familles considérées ci-dessous sont des échelles de comparaison stables :

a) *Au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$, $(A = \mathbb{R}\setminus\{a\})$, les familles :

$$(t \longmapsto (t-a)^\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}; \quad (t \longmapsto (t-a)^\lambda)_{\lambda \in \mathbf{Z}}; \quad (t \longmapsto |t-a|^\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$$

La première (resp. troisième) est dite *échelle des monômes* (resp. *échelle des puissances*) au voisinage de a. La première peut s'utiliser avec $\dot{A} = \mathbb{R}$.

b) *Au voisinage de* $+\infty$, $(A = \mathbb{R})$, les familles :

$$(t \longmapsto t^\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}; \quad (t \longmapsto t^\lambda)_{\lambda \in \mathbf{Z}}; \quad (t \longmapsto t^\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$$

$$(t \longmapsto t^\alpha \ln^\beta t)_{(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2}; \quad (t \longmapsto e^{\alpha t} t^\beta)_{(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2}$$

$$(t \longmapsto e^{P(t)} t^\alpha \ln^\beta t)_{(P,\alpha,\beta) \in V \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}}$$

où V désigne l'ensemble des fonctions de la forme $t \longmapsto k_1 t^{\gamma_1} + \ldots + k_p t^{\gamma_p}$, avec $\gamma_1 > \ldots > \gamma_p > 0$.

2° *Premières propriétés.* — Soit $\mathcal{E} = (\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une échelle de comparaison relativement à la base de filtre $\mathcal{B}$.

Relation d'ordre sur Λ. — On constate que *la relation binaire « $\lambda \leqslant \mu$ » qui signifie « $\lambda = \mu$ ou $\varphi_\mu = o(\varphi_\lambda)$ » est une relation d'ordre total sur* Λ. C'est la seule relation d'ordre sur Λ que nous envisagerons par la suite.

Dans le cas où Λ est une partie de $\mathbb{R}$, il ne s'agit naturellement pas nécessairement de la relation induite sur Λ par l'ordre naturel de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION I. — **Soit $\boldsymbol{a} = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille presque nulle d'éléments d'un $\mathbb{K}$-e.v.n. E, telle que $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \varphi_\lambda$ est la fonction nulle. Alors la famille $\boldsymbol{a}$ est nulle.**

Raisonnons par l'absurde. Supposons que le support Λ' (fini) de la famille $\boldsymbol{a}$ n'est pas vide. Λ' admet un plus petit élément μ, et, pour tout $\lambda \in \Lambda'\setminus\{\mu\}$ on a $\varphi_\lambda = o(\varphi_\mu)$. D'après 5.1.*4*, 4°, il en résulte $f \sim a_\mu \varphi_\mu$, ce qui est en contradiction avec la nullité de f (en effet deux fonctions équivalentes s'annulent simultanément au voisinage de $\boldsymbol{a}$ (5.1.*2*, 4°) et φ_μ vérifie *i*), cf. 1°). □

On démontre de la même façon :

PROPOSITION II. — **Soient $\nu \in \Lambda$, et $(a_\lambda)_{\lambda \leqslant \nu}$ une famille presque nulle de vecteurs de l'e.v.n. E, telle que la fonction $\sum_{\lambda \leqslant \nu} a_\lambda \varphi_\lambda$ soit négligeable devant φ_ν. Alors la famille est nulle.**

5.2.*2*. Développements asymptotiques

Soit $\mathcal{E} = (\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une échelle de comparaison relativement à la base de filtre $\mathcal{B}$.

1° DÉFINITION. — **Soient E un e.v.n., f une fonction de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$, et ν un élément de Λ. S'il existe une famille presque nulle $(a_\lambda)_{\lambda \leqslant \nu}$ de vecteurs de E telle que la fonction :**

$$r_\nu(f) = f - P_\nu(f), \quad \text{avec} \quad P_\nu(f) = \sum_{\lambda \leqslant \nu} a_\lambda \varphi_\lambda$$

soit négligeable devant φ_ν, on dit que $P_\nu(f)$ est un développement asymptotique de f, relativement à l'échelle $\mathcal{E}$, à l'ordre ν (ou à la précision φ_ν) et que $r_\nu(f)$ est le reste de ce développement.

D'après la proposition II du 5.2.*1*, 2°, si un tel développement existe, il est unique. Par ailleurs on peut le considérer comme le développement asymptotique de f, à l'ordre ν, relativement à toute sur-échelle de $\mathcal{E}$.

2° ***Premières propriétés.*** — LINÉARITÉ. — **Si les fonctions f_1 et f_2 de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ admettent chacune un développement asymptotique à l'ordre ν, alors, pour tout couple (α_1, α_2) de scalaires, la fonction $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ admet un développement asymptotique à l'ordre ν et :**

$$P_\nu(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 P_\nu(f_1) + \alpha_2 P_\nu(f_2).$$

Simple conséquence du fait que toute combinaison linéaire de fonctions négligeables devant φ_ν possède la même propriété.

TRONCATURE. — **Soit $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ admettant $\sum_{\lambda \leqslant \nu} a_\lambda \varphi_\lambda$, pour développement asymptotique à l'ordre ν. Alors, pour tout $\mu \in \Lambda$ tel que $\mu \leqslant \nu$, f admet $\sum_{\lambda \leqslant \mu} a_\lambda \varphi_\lambda$ pour développement asymptotique à l'ordre μ.**

Le reste du premier développement, qui est négligeable devant φ_ν, est *a fortiori* négligeable devant φ_μ (d'après $\varphi_\nu = o(\varphi_\mu)$). Par ailleurs la fonction $\sum_{\mu < \lambda \leqslant \nu} a_\lambda \varphi_\lambda$ est négligeable devant φ_μ. □

3° ***Partie principale.*** — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Etant donnée $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$, s'il existe un couple $(\mu, a_\mu) \in \Lambda \times E \backslash \{0\}$ tel que $f \sim a_\mu \varphi_\mu$, ce couple est unique. On dit dans ce cas que f admet $a_\mu \varphi_\mu$ pour partie principale (relativement à $\mathcal{E}$).**

Supposons $f \sim a_\mu \varphi_\mu$ et $f \sim a_\nu \varphi_\nu$, avec $a_\mu \neq 0$, $a_\nu \neq 0$ et $\nu < \mu$. On en déduit : $a_\mu \varphi_\mu \sim a_\nu \varphi_\nu$, ce qui est incompatible avec $\varphi_\mu = o(\varphi_\nu)$. On a donc : $\mu = \nu$, et, par suite : $a_\mu = a_\nu$.

Autre méthode : on utilise le 1°. □

REMARQUE. — Si $a_\mu \varphi_\mu$ est partie principale de f relativement à $\mathcal{E}$, alors $a_\mu \varphi_\mu$ est partie principale de f relativement à toute sur-échelle de $\mathcal{E}$. La réciproque est fausse : au voisinage de $+\infty$, la fonction $f : t \longmapsto e^t \sqrt{t+1}$ est prépondérante devant toutes les fonctions de l'échelle $\mathcal{E} = (t \longmapsto t^\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$, et n'admet donc pas de partie principale relativement à $\mathcal{E}$; en revanche elle admet $t \longmapsto e^t \sqrt{t}$ pour partie principale relativement à la sur-échelle

$$\mathcal{E}' = (t \longmapsto e^{\alpha t} t^\beta)_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} \text{ de } \mathcal{E}.$$

APPLICATION. — Supposons que $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ admette un développement asymptotique non nul, à l'ordre ν. Ecrivons celui-ci en rangeant les termes par ordre de prépondérance décroissant :

$$P_\nu(f) = a_{\lambda_1}\varphi_{\lambda_1} + a_{\lambda_2}\varphi_{\lambda_2} + \ldots + a_{\lambda_p}\varphi_{\lambda_p}$$

avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p$ et $a_{\lambda_1} \neq 0, \ldots, a_{\lambda_p} \neq 0$. On dit quelquefois que p est alors la *longueur* du développement (on notera qu'il peut y avoir une infinité d'éléments de Λ entre λ_1 et λ_p).

Nous constatons $f \sim a_{\lambda_1}\varphi_{\lambda_1}$, $f - a_{\lambda_1}\varphi_{\lambda_1} \sim a_{\lambda_2}\varphi_{\lambda_2}$, ... Le calcul de $P_\nu(f)$ est donc ramené à celui de certaines parties principales.

CAS PARTICULIERS. — *a*) Si $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ admet, au voisinage de a, une partie principale $t \longmapsto a_m(t-a)^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est un *infiniment petit* d'ordre m, par rapport à l'infiniment petit principal $t \longmapsto t-a$.

b) Si $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ admet, au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) une partie principale $t \longmapsto a_m t^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est un *infiniment grand* d'ordre m, par rapport à l'infiniment grand principal $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

4° *Développement asymptotique d'un produit.* — Nous supposons ici que l'échelle de comparaison $\mathcal{E}$ est stable. Nous nous limitons à des fonctions à valeurs dans le corps de base.

PROPOSITION. — **Soient f et g des fonctions de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ admettant des développements asymptotiques non nuls :**

$$F = \sum_{\mu \leqslant \lambda \leqslant \nu} a_\lambda \varphi_\lambda,\ a_\mu \neq 0\,; \quad G = \sum_{\mu' \leqslant \lambda' \leqslant \nu'} b_{\lambda'}\varphi_{\lambda'},\ b_{\mu'} \neq 0$$

(les ordres des développements sont ν et ν' ; les parties principales sont $a_\mu\varphi_\mu$ et $b_{\mu'}\varphi_{\mu'}$).

Posons $\varphi_\mu\varphi_{\nu'} = \varphi_{\omega'}$, $\varphi_{\mu'}\varphi_\nu = \varphi_{\omega''}$ **et** $\omega = \min(\omega', \omega'')$.

Dans ces conditions le produit fg admet un développement asymptotique à l'ordre ω, égal à $P_\omega(FG)$.

On a : $f = F + r$, avec $r = o(\varphi_\nu)$ et $F = O(\varphi_\mu)$

$g = G + s$, avec $s = o(\varphi_{\nu'})$ et $G = O(\varphi_{\mu'})$

D'où : $Fs = o(\varphi_\mu\varphi_{\nu'})$; $rG = o(\varphi_{\mu'}\varphi_\nu)$; $rs = o(\varphi_\nu\varphi_{\nu'})$

et *a fortiori*, du fait du choix de ω :

$$Fs = o(\varphi_\omega)\,;\ rG = o(\varphi_\omega)\,;\ rs = o(\varphi_\omega).$$

Comme FG, qui — d'après la stabilité — est une combinaison de fonctions de $\mathcal{E}$, admet un développement asymptotique à tout ordre, et en particulier à l'ordre ω, la proposition est démontrée. □

Retenons que $P_\omega(fg)$ s'obtient en effectuant le produit $FG = \Sigma a_\lambda b_{\lambda'}\varphi_\lambda\varphi_{\lambda'}$ et en supprimant les termes négligeables devant φ_ω.

GÉNÉRALISATION. — *a*) La proposition s'étend par récurrence au produit d'un nombre quelconque de fonctions de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Reprenons, en particulier, le développement de f considéré ci-dessus ; pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k admet un développement asymptotique à l'ordre ω tel que $\varphi_\omega = (\varphi_\mu)^{k-1}\varphi_\nu$; ce développement est $P_\omega(F^k)$.

b) Les résultats s'étendent sans difficulté au cas où f (resp. g) a un développement asymptotique nul à l'ordre ν (resp. ν').

c) Retenons que, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ et pour toute famille $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de vecteurs de l'e.v.n. E, la fonction $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k$ admet un développement asymptotique toutes les fois que f en admet un.

5.2.3. Notion de développement limité

Nous allons étudier plus spécialement les développements asymptotiques suivant une échelle de monômes ; ce sont eux qui sont le plus couramment utilisés.

Ici a est un point de $\mathbb{R}$, A un voisinage de a (ou l'intersection d'un tel voisinage et de $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$). Cette hypothèse implique $a \in A$.

1° DÉFINITION. — **Si une fonction $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ admet un développement asymptotique à l'ordre n, relativement à l'échelle $\mathcal{E} = (t \longmapsto (t-a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ce développement est appelé développement limité de f à l'ordre n, au voisinage de a.**

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une famille $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de vecteurs de E telle que la fonction

$$P : t \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (t-a)^k \tag{1}$$

(qui — par abus de langage — est dite fonction polynôme) vérifie les deux conditions suivantes, qui sont équivalentes :

i) La fonction $f-P$ est négligeable devant la fonction $t \longmapsto (t-a)^n$.

ii) La fonction $\varepsilon \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)$ définie, sur Déf f, par

$$\varepsilon(t) = \frac{f(t)-P(t)}{(t-a)^n} \quad \text{si } t \neq a\,; \quad \varepsilon(a) = 0$$

est continue au point a.

CONSÉQUENCE. — De : $f(t) = P(t)+(t-a)^n\varepsilon(t)$ on déduit qu'*une condition nécessaire pour que f admette un développement limité à l'ordre n, au voisinage de a, est que f soit continue au point a.* Cette condition est suffisante si $n = 0$.

Remarques. — *a*) Si la fonction P définie par (1) vérifie la condition : *iii*) La fonction $f-P$ est dominée par la fonction $t \longmapsto (t-a)^{n+1}$, alors P vérifie *a fortiori i*), et P est un développement limité à l'ordre n de f au voisinage de a. Les écritures

$$f(t) = P(t)+o(t-a)^n \text{ et } f(t) = P(t)+O(t-a)^{n+1}$$

sont toutes deux correctes. La seconde en dit plus sur la fonction f; on peut dire qu'elle correspond à un *développement limité, au sens fort.*

b) L'existence du développement limité (1), à l'ordre $n \geqslant 1$, implique que f admet a_1, pour dérivée au point a (il peut s'agir d'une dérivée à droite ou à gauche).

c) Nous aurions pu prendre pour A un voisinage de a privé de a (ou l'intersection d'un voisinage de a avec $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$), et adopter la même définition des développements au voisinage de a. Une fonction $f \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(E)$ admettant un tel développement aurait alors une limite l en a, suivant $\mathfrak{B}$; si f n'était pas définie en a on la prolongerait en convenant que $f(a) = l$; si f était discontinue en a, on la « rendrait continue » en remplaçant sa valeur en a par l. On serait ainsi ramené au cas que nous avons décidé de traiter.

d) Le changement de variable $t \longmapsto t-a$ permet de se ramener au cas $a = 0$, qui sera le plus souvent envisagé dans la suite.

e) On appelle développement limité au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) tout développement asymptotique relativement à l'échelle $(t \longmapsto t^{-k})_{k \in \mathbb{N}}$. Le changement de variable $t \longmapsto t^{-1}$ permet de se ramener au voisinage de $0+$ (resp. $0-$).

Exemples. — *a*) Soient $n \in \mathbb{N}$, et f une fonction polynôme. Le polynôme P obtenu en supprimant les monômes de f dont le degré excède n (s'il en existe) est un développement limité à l'ordre n de f, au voisinage de 0.

b) Pour tous $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-\ldots+(-1)^n t^n + t^n \frac{(-1)^{n+1}t}{1+t}$$

que l'on peut écrire : $\dfrac{1}{1+t} = P_n(t)+t^n\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) = (-1)^{n+1}\dfrac{t}{1+t}$.

On constate $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. On en déduit que P_n est un développement limité à l'ordre n de la fonction $t \longmapsto 1/(1+t)$, au voisinage de 0.

2° *Premières propriétés des développements limités.* — Tout ce qui a été dit des développements asymptotiques (*unicité, linéarité, troncature, partie principale, développement d'un produit et d'une puissance entière* dans le cas de fonctions numériques) s'applique intégralement aux développements limités. Nous aurons en outre l'occasion d'utiliser le résultat suivant :

Proposition. — **Soit f une fonction à valeurs dans l'e.v.n. E, admettant un développement limité à l'ordre n, P, au voisinage de 0. Alors la fonction $t \longmapsto f(-t)$ admet la fonction $t \longmapsto P(-t)$ pour développement limité à l'ordre n, au voisinage de 0.**

De $f(t) = P(t) + t^n \varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{\mathscr{B}} \varepsilon = 0$, on déduit :

$$f(-t) = P(-t) + t^n \varepsilon_1(t), \text{ avec } \varepsilon_1(t) = (-1)^n \varepsilon(-t) \text{ ; d'où } \lim_{\mathscr{B}} \varepsilon_1 = 0. \qquad \square$$

COROLLAIRE. — **Tout développement limité au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire) est une fonction paire (resp. impaire), ce qui signifie que les coefficients d'indice impair (resp. pair) du développement sont nuls.**

Résulte de l'unicité du développement à un ordre donné.

Le paragraphe 5.2.4 va nous permettre de disposer d'exemples dans la suite de l'étude.

5.2.4. Développements limités fournis par la formule de Taylor

1° ***Théorie.*** — Pour toute fonction f, à valeurs dans un e.v.n. E, définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et admettant une dérivée d'ordre n au point a, on a, par la formule de Taylor-Young :

$$f(t) = P_n(t) + o(t-a)^n, \qquad \text{avec} \qquad P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a),$$

ce qui montre que f admet P_n pour développement limité à l'ordre n, au voisinage de a.

Si $f^{(n+1)}(a)$ existe, P_n est même un développement limité, au sens fort.

2° ***Pratique.*** — Le lecteur vérifiera par récurrence que toutes les fonctions que nous allons considérer sont de classe C^∞ sur un voisinage de 0.

$f(t)$	$f^{(k)}(t)$	$f^{(k)}(0)$
e^t	e^t	1
$\cos t$	$\cos(t+k\pi/2)$	$\cos(k\pi/2)$
$\sin t$	$\sin(t+k\pi/2)$	$\sin(k\pi/2)$
$\ln(1+t)$	$(-1)^{k+1}(k-1)!\,(1+t)^{-k}$	$(-1)^{k+1}(k-1)!$
$(1+t)^m$	$m(m-1)...(m-k+1)(1+t)^{m-k}$	$m(m-1)...(m-k+1)$

Compte tenu de la proposition du 1°, et de la linéarité, on dispose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des développements limités, au voisinage de 0 :

$$e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + O(t^{n+1}) \;; \qquad e^{-t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-t)^k}{k!} + O(t^{n+1})$$

$$\text{ch}\, t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + O(t^{2n+2}) \;; \qquad \text{sh}\, t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(t^{2n+3})$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + O(t^{2n+2})$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(t^{2n+3})$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} + O(t^{n+1})$$

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \dots\dots\dots - \frac{t^n}{n} + O(t^{n+1})$$

$$\operatorname{Arg\,th} t = t + \frac{t^3}{3} + \dots\dots\dots + \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + O(t^{2n+3})$$

$$(1+t)^m = 1 + \frac{m}{1!} t + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} t^n + O(t^{n+1})$$

Cette dernière formule, écrite successivement pour $m = 1/2$ et $m = -1/2$, donne :

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2 \cdot 4} t^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots\dots\dots \cdot (2n)} t^n + O(t^{n+1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2} t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^2 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots\dots\dots \cdot (2n)} t^n + O(t^{n+1}).$$

5.2.5. Développement limité d'un quotient

PROPOSITION. — **Soient f et g des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui admettent au voisinage de 0 des développements limités au même ordre n, F et G, tels que $G(0) \neq 0$. Alors la fonction $h = f/g$ admet pour développement limité à l'ordre n, au voisinage de 0, la fonction polynôme Q associée au quotient $Q(X)$, à l'ordre n, du polynôme $F(X)$ par le polynôme $G(X)$, suivant les puissances croissantes de X.**

— Rappelons (I.6.3.*1*) qu'il existe un, et un seul couple $(Q(X), R(X))$ de polynômes tel que :

$$F(X) = G(X)\, Q(X) + X^{n+1} R(X) \quad \text{et} \quad \deg(Q(X)) \leqslant n.$$

— Comme $G(0) \neq 0$, il existe un voisinage de 0 sur lequel F/G est définie et vérifie :

$$F(t)/G(t) = Q(t) + t^{n+1} R(t)/Q(t).$$

Comme $R(t)/Q(t) = O(1)$, on constate que F/G admet Q pour développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 (et d'ailleurs au sens fort).

— En utilisant $\lim g = G(0) \neq 0$, on constate qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel f/g est définie et vérifie :

$$\frac{f(t)}{g(t)} - \frac{F(t)}{G(t)} = \frac{G(t)\,[F(t)+o(t^n)] - F(t)\,[G(t)+o(t^n)]}{g(t)\,G(t)}.$$

En utilisant $\lim(g \cdot G) = (G(0))^2 \neq 0$, on en déduit :

$$f(t)/g(t) - F(t)/G(t) = o(t^n).$$ □

REMARQUE. — Si F et G sont des développements au sens fort, il en est de même pour Q. En effet, dans le calcul précédent, on peut remplacer $o(t^n)$ par $O(t^{n+1})$.

EXEMPLE. — *Développement limité de la fonction* tg, *à l'ordre* 8, *au voisinage de* 0.

Cette fonction est de classe C^∞ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. D'où l'existence d'un développement limité (au sens fort) au voisinage de 0, à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. Le développement limité à l'ordre 8, qui est une fonction impaire, coïncide avec le développement limité à l'ordre 7. En utilisant tg = sin/cos, et les développements limités à l'ordre 7 de sin et cos :

$$t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5\,040} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720},$$

On trouve par une division suivant les puissances croissantes :

$$\boxed{\operatorname{tg} t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + O(t^9)}$$

Un calcul analogue fournit :

$$\boxed{\operatorname{th} t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + O(t^9)}$$

REMARQUES. — *a*) Comme cas particulier, on sait calculer le développement limité au voisinage de 0, à un ordre quelconque, d'une fonction rationnelle définie au point 0.

b) Reprenons les hypothèses de la proposition précédente, à cela près que nous supposons ici : $G(0) = 0$. Deux cas sont à envisager :

— Si la valuation de $G(X)$, désignée par q, est au plus égale à celle de $F(X)$, nous avons, en tout point t de l'ensemble de définition de f/g :

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t)/t^q}{g(t)/t^q}$$

et nous disposons d'un développement limité de f/g, à l'ordre $n-q$.

— Si la valuation de $G(X)$ excède de p celle de $F(X)$, ($p \in \mathbb{N}^*$), nous pouvons obtenir un développement limité de la fonction $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{g(t)/t^p}$, et donc un développement asymptotique

de f/g relativement à l'échelle $(t \longmapsto t^k)_{k \in \mathbb{Z}}$. C'est ainsi que de :

$$t \operatorname{cotg} t = \frac{\cos t}{t^{-1} \sin t} = \frac{1 - t^2/2 + t^4/24 + O(t^5)}{1 - t^2/6 + t^4/120 + O(t^5)}$$

nous déduisons l'expression, valable sur $]-\pi, +\pi[\setminus\{0\}$:

$$\operatorname{cotg} t = \frac{1}{t} - \frac{t}{3} - \frac{t^3}{45} + O(t^4)$$

5.2.*6*. Dérivation d'un développement limité

Proposition. — **Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$, et $f : I \to E$ une application dérivable, f' admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, à savoir :**

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n.$$

Alors f admet le développement limité à l'ordre $n+1$, au voisinage de 0 :

$$Q(t) = f(0) + a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + \dots + a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

— Q a été déterminé par : $Q'(t) = P(t)$ et $Q(0) = f(0)$.

— Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On peut lui associer $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset I$ et

$$\forall t \in]-\alpha, \alpha[\qquad \|f'(t) - P(t)\| \leqslant \varepsilon\, |t|^n.$$

Posons $\varphi(t) = f(t) - Q(t)$ et $\psi(t) = \varepsilon\, t^{n+1}/(n+1)$, nous avons :

$$\forall t \in [0, \alpha[\qquad \|\varphi'(t)\| \leqslant \psi'(t).$$

Nous pouvons appliquer **4.2.*1***, 1° au segment $[0, x]$, où x est un point quelconque de $[0, \alpha[$. Comme $\varphi(0) = 0_E$ et $\psi(0) = 0_{\mathbb{R}}$, il vient :

$$\forall x \in [0, \alpha[\qquad \|f(x) - Q(x)\| \leqslant \varepsilon\, x^{n+1}/(n+1)$$

On démontrerait de la même façon :

$$\forall x \in]-\alpha, 0] \ \|f(x) - Q(x)\| \leqslant \varepsilon(-x)^{n+1}/(n+1) \qquad \square$$

Remarque. — L'existence d'un développement limité au voisinage de 0 :

$$f(t) = P(t) + t^n \varepsilon(t), \qquad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

n'implique pas la dérivabilité de f sur un voisinage de 0 : la fonction ε peut admettre 0 pour limite au point 0 sans être dérivable. Tout au plus peut-on dire que *si f est dérivable sur un voisinage de* 0 *et si f et f' admettent des*

développements limités au voisinage de 0, *aux ordres* m *et* $m-1$, *le second est la dérivée du premier.* Notons qu'il en est ainsi lorsque f est m fois dérivable au point 0.

A titre d'exemple le lecteur vérifiera que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(0) = 0 ; \qquad f(t) = t^3 \sin(1/t^2) \quad \text{si} \quad t \neq 0$$

admet la fonction nulle pour développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0, alors que la fonction dérivée, qui est définie par :

$$f'(0) = 0 ; \qquad f'(t) = 3t^2 \sin(1/t^2) - 2\cos(1/t^2)$$

n'est pas continue en 0, et n'admet donc pas de développement limité au voisinage de 0.

Exemples. — *a*) A partir de $\dfrac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + O(t^{2n+2})$ et compte tenu de $\operatorname{Arc\,tg} 0 = 0$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\operatorname{Arc\,tg} t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + O(t^{2n+3})}$$

b) A partir de $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k)} t^{2k} + O(t^{2n+2})$ et compte tenu de $\operatorname{Arc\,sin} 0 = 0$, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{Arc\,sin} t = t + \sum_{k=1}^{n} \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k)} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + O(t^{2n+3})}$$

L'égalité $\operatorname{Arc\,cos} t = \pi/2 - \operatorname{Arc\,sin} t$ permet d'en déduire le développement limité à un ordre quelconque de Arc cos, au voisinage de 0.

c) Un calcul analogue permettrait de retrouver le développement limité à l'ordre $2n+1$ de Arg th, déjà obtenu au 5.2.*4*, 1° ; un autre fournirait :

$$\boxed{\operatorname{Arg\,sh} t = t + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2k)} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + O(t^{2n+3})}$$

En ce qui concerne la fonction Arg ch, la question ne se pose pas.

• L'intégration d'un développement limité sera étudiée au 7.2.*4*, 1°.

5.2.*7*. Développement d'une fonction composée

1° ***Notations.*** — Nous étudions $h = g \circ f$ dans les conditions suivantes :

• f appartient à un ensemble de fonctions $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{R})$, (notation du 5.1.*1*), et admet un développement asymptotique P non nul, relativement à une échelle stable $\mathcal{E} = (\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, à la précision φ_ν ; soit $a_\mu \varphi_\mu$, avec $a_\mu \neq 0$, la partie principale de f. Nous supposons que f *admet* 0 *pour limite* suivant la base de filtre $\mathfrak{B}$, ce qui peut s'écrire $\varphi_\mu = o(1)$.

• g, à valeurs dans un e.v.n. E, est définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant d'une part 0, d'autre part l'ensemble des valeurs de f. Nous supposons

que g admet, au voisinage de 0, un développement limité Q, à l'ordre n, non constant, et donc de la forme :

$$g(u) = b_0+b_m u^m+\ldots+b_n u^n+u^n\varepsilon(u),\ b_m \neq 0$$

la fonction ε, prolongée par $\varepsilon(0) = 0_E$, étant continue au point 0.

2° *Calcul.* — Ecrivons $g \circ f = Q \circ f+f^n\varepsilon_1$, avec $\varepsilon_1 = \varepsilon \circ f$ et remarquons tout d'abord $\lim\limits_{\mathcal{B}} \varepsilon_1 = 0_E$.

D'après **5**.2.2. *in fine*, chacune des fonctions $b_k f^k$, $m \leqslant k \leqslant n$, admet un développement asymptotique à la précision $(\varphi_\mu)^{k-1}\varphi_\nu$. Compte tenu de $\varphi_\mu = o(1)$, on en déduit que $Q \circ f$ admet un développement asymptotique S à la précision $(\varphi_\mu)^{m-1}\varphi_\nu$, que nous écrivons $\varphi_{\nu'}$; en général on a d'ailleurs $m = 1$, et donc $\nu' = \nu$.

De $f \sim a_\mu\varphi_\mu$, on déduit d'autre part $f^n\varepsilon_1 \sim (a_\mu\varphi_\mu)^n\varepsilon_1$. D'où :

$$f^n\varepsilon_1 = o((\varphi_\mu)^n).$$

En notant $\varphi_{\nu''} = (\varphi_\mu)^n$ nous avons ainsi :

$$g \circ f = S+o(\varphi_{\nu'})+o(\varphi_{\nu''}).$$

On dispose donc d'un développement asymptotique de $g \circ f$, relativement à l'échelle $\mathcal{E}$, à l'ordre $\min(\nu', \nu'')$, qui, suivant le cas, est S ou se déduit de S par troncature.

EXEMPLE. — *Développement de* $h(t) = \left(\dfrac{t+1}{t}\right)^t$ *au voisinage de* $0+$.

Écrivons $h = g \circ f$, avec $g = \exp$ et $f : t \longmapsto t(\ln(1+t) - \ln t)$.

Nous pouvons écrire : $\exp u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + o(u^3)$

$$\ln(1+t) = t - t^2/2 + o(t^2)$$

ce qui entraîne : $f(t) = -t\ln t + t^2 - t^3/2 + o(t^3)$.

D'où la possibilité de développer h relativement à $\mathcal{E} = (t \longmapsto t^\alpha \ln^\beta t)_{(\alpha,\beta)\in\mathbf{N}^2}$. En effet φ_μ, qui est ici $t \longmapsto -t\ln t$ admet bien 0 pour limite au point 0. Nous avons $n = 3$ et $m = 1$. D'où $\varphi_{\nu'} = \varphi_\nu$ et :

$$\varphi_{\nu'} : t \longmapsto t^3; \qquad \varphi_{\nu''} : t \longmapsto (t\ln t)^3.$$

Comme $\varphi_{\nu'} = o(\varphi_{\nu''})$, nous obtiendrons la précision $\varphi_{\nu''}$. Pour cela nous devons développer f, f^2 et f^3 à cette précision. On obtient :

$$f(t) = -t\ln t + t^2 + o(\varphi_{\nu''});$$

$$f^2(t) = t^2\ln^2 t + o(\varphi_{\nu''}); \qquad f^3(t) = -t^3\ln^3 t + o(\varphi_{\nu''}).$$

Finalement, au voisinage de $0+$:

$$\left(\frac{t+1}{t}\right)^t = 1 - t\ln t + \frac{1}{2}t^2\ln^2 t + t^2 - \frac{1}{6}t^3\ln^3 t + o(t^3\ln^3 t)$$

Notons que nous avons arbitrairement fixé les longueurs des développements de $\exp u$ et $\ln(1+t)$. Le lecteur pourra s'exercer à faire varier ces longueurs de façon à obtenir un développement de $g \circ f$ à une précision imposée à l'avance; nous reviendrons sur cette question.

3° ***Cas de deux développements limités.*** — Nous avons ici :

$$f(t) = a_\mu t^\mu + \ldots + a_\nu t^\nu + o(t^\nu), \quad \mu > 0,\ a_\mu \neq 0$$
$$g(u) = b_0 + b_m u^m + \ldots + b_n u^n + o(u^n), \quad b_m \neq 0$$

D'où : $\nu' = (m-1)\mu + \nu$ et $\nu'' = n\mu$.

Si on veut un développement limité de $g \circ f$ à un ordre imposé p, il faudra donc, puisque m et μ sont imposés, déterminer n et ν, aussi petits que possible, vérifiant la condition :

$$\min\left((m-1)\mu + \nu,\ n\mu\right) \geqslant p.$$

Exemples. — *a) Développement limité de* $h(t) = \ln(\cos t)$, *au voisinage de* 0, *à l'ordre* 6.

$$h = g \circ f \quad \text{avec} \quad g(u) = \ln(1-u) \quad \text{et} \quad f(t) = 1 - \cos t.$$

Ici $m = 1$ et $\mu = 2$. Nous devons prendre $\nu \geqslant 6$ et $2n \geqslant 6$. Partons donc de :

$$\ln(1-u) = -u - u^2/2 - u^3/3 + o(u^3)$$
$$1 - \cos t = t^2/2 - t^4/24 + t^6/720 + o(t^6).$$

Pour obtenir les développements de f^2 et f^3 à l'ordre 3, il est commode d'écrire :

$$f(t) = t^2/2 \cdot (1 - t^2/12 + o(t^2)).$$

D'où : $$f^2(t) = t^4/4 \cdot (1 - t^2/6 + o(t^2))\,; \qquad f^3(t) = t^6/8 \cdot (1 + o(1)).$$

Comme il s'agit d'une fonction paire de classe C^∞, nous avons :

$$\ln(\cos t) = -t^2/2 - t^4/12 - t^6/45 + O(t^8).$$

On retrouverait ce résultat en utilisant : $(\ln(\cos))' = -\operatorname{tg}$.

b) Développement limité de $h(t) = \dfrac{1}{\cos t}$ *au voisinage de* 0, *à l'ordre* 6.

Nous pourrions utiliser le développement d'un quotient (5.2.5). Il est plus commode d'écrire $h = g \circ f$, avec $g(u) = \dfrac{1}{1-u}$ et $f(t) = 1 - \cos t$. Nous sommes dans les mêmes conditions que ci-dessus ; nous adopterons encore : $\nu = 6$ et $n = 3$.

On a : $1/(1-u) = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$. On trouve :

$$\frac{1}{\cos t} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{24}t^4 + \frac{61}{720}t^6 + O(t^8).$$

5.2.8. Développement limité d'une application réciproque

Proposition. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone, admettant au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, et une partie principale $t \longmapsto at$, $a \neq 0$. Alors f^{-1} admet, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre n, et une partie principale $t \longmapsto a^{-1}t$.**

— L'existence de f^{-1} (application réciproque de l'application $I \to f(I)$ induite par f) et sa continuité résultent de 4.3.2, 2°.

— On part de : $f(t) = at(1 + tP(t)) + o(t^n)$, avec $\deg(P(X)) \leqslant n-2$.

De $f(0) = 0$ on déduit $f^{-1}(0) = 0$.

De $f(t) \sim at$, on déduit $f(f^{-1}(u)) \sim af^{-1}(u)$ et $f^{-1}(u) \sim a^{-1}u$.

— A toute fonction polynôme de la forme $Q(u) = \sum_{k=1}^{n} b_k u^k$ associons l'application $g_Q = f^{-1} - Q$. Nous avons $g_Q \circ f = Id_I - Q \circ f$. D'où l'existence d'un développement limité S_Q à l'ordre n, de la fonction $g_Q \circ f$, qui est celui de la fonction polynôme :

$$t \longmapsto t - \sum_{k=1}^{n} b_k a^k t^k [1 + t P(t)]^k$$

et qui se déduit de cette fonction par troncature ; il s'écrit donc :

$$S_Q = t - ab_1 t - (a^2 b_2 + \alpha_{2,1} b_1) t^2 - \ldots - (a^n b_n + \alpha_{n,n-1} b_{n-1} + \ldots + \alpha_{n,1} b_1) t^n.$$

L'étude d'un système triangulaire (I.**11**.2.*3*) nous apprend que, puisque $a \neq 0$, on peut déterminer d'une, et d'une seule façon $(b_1, \ldots, b_n)$, et donc Q de telle sorte que S_Q soit le polynôme nul, ou encore que $g_Q \circ f = o(t^n)$. Soit Q_0 la fonction polynôme ainsi déterminée. Nous avons : $t = (Q_0 \circ f)(t) + o(t^n)$.

Comme $f^{-1}(u) \sim a^{-1} u$ fournit $o((f^{-1})^n(u)) = o(u^n)$, il en résulte, en remplaçant t par $f^{-1}(u)$ dans l'égalité précédente :

$$f^{-1}(u) = Q_0(u) + o(u^n)$$

Ce qui prouve que Q_0 répond à la question. □

A titre d'exercice, le lecteur vérifiera que si $f(t) = t + \alpha t^n + o(t^n)$, alors

$$f^{-1}(u) = u - \alpha u^n + o(u^n).$$

Remarque. — La méthode s'étend au cas où f a une partie principale de la forme $t \longmapsto at^m$, $m \in \mathbf{N}^*$, avec cependant quelques réserves si m est pair.

Exemple. — *Soit* $f(t) = \dfrac{t^5}{1+t^4}$. *Chercher un développement asymptotique de* f^{-1} *au voisinage de* 0.

Le lecteur vérifiera que f est une application continue, strictement croissante et impaire de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; f^{-1} existe donc, et possède les mêmes propriétés. On vérifie aisément qu'il en est de même pour $\varphi = f^{1/5}$ et donc pour φ^{-1}. La fonction $\varphi : t \longmapsto t(1+t^4)^{-1/5}$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n, et cela pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; comme $\varphi(t) \sim t$, la proposition précédente nous dit que φ^{-1} possède la même propriété.

Or on a : $f^{-1}(u) = \varphi^{-1}(u^{1/5})$. Il en résulte que f^{-1} admet un développement asymptotique d'ordre ν dans l'échelle $(u \longmapsto u^k)_{k \in \mathbb{Q}_+}$, et cela pour tout $\nu \in \mathbb{Q}_+$. Pour fixer les idées, partons de :

$$\varphi(t) = t - \frac{1}{5} t^5 + \frac{3}{25} t^9 + o(t^9).$$

Ici $a = 1$; φ^{-1}, qui est impaire, admet donc un développement limité à l'ordre 9 de la forme : $u \longmapsto u + \alpha u^3 + \beta u^5 + \gamma u^7 + \delta u^9$.

De $\varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$ on déduit :

$$t - \frac{1}{5} t^5 + \frac{3}{25} t^9 + \alpha \left(t^3 - \frac{3}{5} t^7 \right) + \beta (t^5 - t^9) + \gamma t^7 + \delta t^9 = t + o(t^9).$$

D'où : $\alpha = 0$, $\beta = 1/5$, $\gamma = 0$, $\delta = 2/25$, et :

$$f^{-1}(u) = u^{1/5} - 1/5 \cdot u + 2/25 \cdot u^{9/5} + O(u^{13/5}).$$

5.2.*9*. Applications des développements asymptotiques

1° *Limites.* — Soit f une fonction à valeurs dans un e.v.n. E, définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (notation du **5**.1.*1*). Il s'agit tout d'abord de savoir

si f admet une limite au point a. Pour cela on utilise essentiellement les résultats suivants (dans l'énoncé desquels on sous-entend « au voisinage de a ») :

— *S'il existe une fonction g équivalente à f et admettant une limite l, alors f admet l pour limite* (ce résultat restant valable pour $l = +\infty$ ou $-\infty$, dans le cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$).

— *le produit et le quotient de fonctions numériques sont stables dans l'équivalence* : si f est de la forme $\dfrac{f_1 \cdot \ldots \cdot f_p}{f_{p+1} \cdot \ldots \cdot f_{p+q}}$, on obtient une fonction équivalente à f en remplaçant l'une quelconque des f_i par une fonction équivalente.

Dans la pratique on recherchera une fonction équivalente à f_i de la forme :

— $t \longmapsto l_i$ si f_i admet une limite non nulle l_i,
— partie principale de f_i dans une « bonne » échelle de comparaison.

REMARQUE. — Dans le cas $a \in \mathbb{R}$, on a en général intérêt à se ramener à : $a = 0$.

EXEMPLES. — *a) Partie principale de $f(t) = t^t - (\sin t)^{\sin t}$ au voisinage de* 0.

Nous nous intéressons à la restriction de f à $]0, \pi[$. Ecrivons :

$$f(t) = -\exp(t \ln t) \cdot [\exp(\sin t \ln(\sin t) - t \ln t) - 1].$$

Étant donné que $\lim\limits_{t \to 0} \exp(t \ln t) = 1$, nous avons $f(t) \sim h(t)$ avec

$$h(t) = -\exp(u(t)) + 1 \qquad \text{et} \qquad u(t) = \sin t \ln(\sin t) - t \ln t.$$

Etant donné que $\lim\limits_{t \to 0} u(t) = 0$, nous avons $h(t) \sim -u(t)$, et donc $f(t) \sim -u(t)$.

Écrivons : $$\frac{u(t)}{t} = \left(\frac{\sin t}{t} - 1\right) \ln t + \frac{\sin t}{t} \ln \frac{\sin t}{t}.$$

Nous avons : $$\frac{\sin t}{t} - 1 \sim -\frac{t^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \ln \frac{\sin t}{t} \sim -\frac{t^2}{6}$$

$\dfrac{u(t)}{t}$ est la somme de deux infiniment petits respectivement équivalents à $-\dfrac{t^2}{6}$ et $-\dfrac{t^2}{6} \ln t$.

D'où : $$u(t) \sim \frac{t^3}{6} \ln t \qquad \text{et} \qquad f(t) \sim \frac{t^3}{6} \ln t.$$

b) Etude de $x \longmapsto \dfrac{x(\pi - 6 \operatorname{Arc\,sin} x) + (2x-1)\sqrt{2x+2}}{4x^3 - 3x + 1}$ *au voisinage de* $\dfrac{1}{2}$.

Après avoir vérifié qu'il s'agit du quotient de deux fonctions admettant la limite 0, on effectue le changement de variable $x = 1/2 + t$, qui ramène à l'étude au voisinage de 0 de la fonction f/g avec :

$$f(t) = (1/2 + t)(\pi - 6 \operatorname{Arc\,sin}(1/2 + t)) + 2t\sqrt{3 + 2t}\,;\ g(t) = 6t^2 + 4t^3.$$

Etant donné que $g(t) \sim 6t^2$, il suffit de chercher un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$t\sqrt{3 + 2t} = \sqrt{3}\,t(1 + 2/3\,t)^{1/2} = \sqrt{3}\,t + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,t^2 + o(t^2).$$

Par la formule de Taylor :

$$\text{Arc sin}\,(1/2+t) = \pi/6 + 2/\sqrt{3}\,t + \frac{2}{3\sqrt{3}}\,t^2 + o(t^2).$$

D'où : $f(t) \sim \dfrac{-12}{\sqrt{3}}\,t^2$. Il existe une limite, égale à $\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$.

2° *Dérivées.* — Il peut arriver que l'on soit en mesure de prolonger une fonction qui n'est pas définie au point a, sous la forme d'une fonction non seulement continue, mais dérivable au point a.

Etudions par exemple :

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \qquad t \longmapsto \frac{1}{(e^t-1)} - \frac{1}{t}$$

$f = g/h$ avec : $g(t) = 1+t-e^t$ et $h(t) = t(e^t-1)$.

En utilisant $e^t = 1+t+t^2/2+o(t^2)$ on trouve : $\lim\limits_{t\to 0} f = -1/2$.

Prolongeons f en la fonction continue $\hat{f}$ qui coïncide avec f sur $\mathbb{R}^*$, ce qui revient à convenir que $\hat{f}$ prend la valeur $-1/2$ au point 0. Cherchons si $\hat{f}$ est dérivable au point 0.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{\hat{f}(t) + 1/2}{t} = \frac{2+t+(t-2)\,e^t}{2t^2(e^t-1)} = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}.$$

Etant donné que $\psi \sim 2t^3$, on cherche un développement limité de φ à l'ordre 3. En partant de : $e^t = 1+t+t^2/2+t^3/6+o(t^3)$, on trouve :

$$\varphi \sim \frac{1}{6}\,t^3 \qquad \text{et} \qquad \varphi/\psi \sim \frac{1}{12}. \qquad \text{D'où :} \qquad \hat{f}'(0) = \frac{1}{12}.$$

3° *Branches infinies d'une courbe $y = f(x)$.* — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, admettant une limite infinie au point $+\infty$ (resp. $-\infty$) de $\overline{\mathbb{R}}$. Il peut arriver qu'un développement asymptotique de la fonction f, au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) aide à la construction des asymptotes de la courbe C d'équation $y = f(x)$.

EXEMPLE. — $f(x) = \sqrt[4]{x^4+x^2} - \sqrt[3]{x^3+x^2}$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x} f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Sur $\mathbb{R}^*_+$, nous avons :

$$\frac{1}{x} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/4} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3}.$$

D'où, en utilisant des développements limités à l'ordre 2 de $(1+t^2)^{1/4}$ et $(1+t)^{1/3}$, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{x} f(x) = \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{13}{36}\,\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Au voisinage de $+\infty$, la courbe C admet pour asymptote la droite D d'équation $y = -1/3$ et elle est située, par rapport à D, dans le demi-plan qui contient le point (0, 0), (i.e. « au-dessus » de l'asymptote).

Sur $\mathbb{R}^*_-$:

$$\frac{1}{x} f(x) = -\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$f(x) = -2x - \frac{1}{3} - \frac{5}{36}\,\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Au voisinage de $-\infty$, C admet pour asymptote la droite D' d'équation $y = -2x - 1/3$ et elle est située, par rapport à D' dans le demi-plan qui contient (0, 0), (i.e. « au-dessus » de l'asymptote).

5.3. ÉTUDE LOCALE (suite)

5.3.*1*. Extremums relatifs (ou locaux)

1° Nous allons poser une définition qui dépasse le cadre de notre étude, et qui sera reprise au **8**.3.*3*.

Nous ne considérons que des fonctions numériques (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}$).

DÉFINITION. — **Soit A une partie d'un espace topologique X, f: $A \to \mathbb{R}$ une application, et a un point de A. On dit que f admet un maximum absolu au point a si, et seulement si :**

$$\forall\, x \in A \qquad f(x) \leqslant f(a). \tag{1}$$

On dit que f admet un maximum relatif (ou local) au point a si, et seulement s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$, tel que :

$$\forall\, x \in V \cap A \qquad f(x) \leqslant f(a). \tag{2}$$

Si (1) est remplacé par : $\forall\, x \in A\backslash\{a\} \quad f(x) < f(a)$, on parle de *maximum absolu au sens strict.*

Si (2) est remplacé par : $\forall\, x \in (V \cap A)\backslash\{a\} \qquad f(x) < f(a)$ on parle de *maximum relatif au sens strict.*

On définit de la même façon un *minimum absolu* et un *minimum relatif* (qui correspondent d'ailleurs à un maximum pour $-f$) ; *extremum* s'entend au sens de « maximum ou minimum ».

REMARQUE. — Il va de soi que si f admet un maximum absolu en $a \in A$, il s'agit également d'un maximum relatif.

2° Dans toute la suite du **5**.3.*1*., nous n'étudions que le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Remarquons tout d'abord que f, définie sur $U \in \mathcal{V}(a)$ peut présenter un extremum en a, sans être dérivable en a : c'est le cas pour $t \longmapsto |t|$, au point $a = 0$. Mais *nous nous limitons ici au cas où f est définie sur $U \in \mathcal{V}(a)$ et dérivable en a.*

On pose :

DÉFINITION. — **On dit que $a \in \mathbb{R}$ est** *point critique* **d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie sur $U \in \mathcal{V}(a)$, si, et seulement si f admet au point a une dérivée nulle.**

On peut ainsi énoncer :

THÉORÈME I. — **Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie sur $U \in \mathcal{V}(a)$ et dérivable en a, admette un extremum relatif en a est que a soit un point critique de f.**

La condition est nécessaire. — Il suffit de reprendre la démonstration du lemme de Rolle (les rôles de c et M étant tenus par a et $f(a)$).

La condition n'est pas suffisante. — L'application $t \longmapsto t^3$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ n'admet pas d'extremum relatif au point $a = 0$ en lequel elle admet une dérivée nulle.

THÉORÈME II. — **Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie sur $U \in \mathcal{V}(a)$, n fois dérivable en a, $n \geqslant 2$, telle que :**

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \tag{2}$$

Alors f admet un extremum relatif en a si, et seulement si n est pair ; il s'agit, dans ce cas, d'un maximum si $f^{(n)}(a) > 0$.

La formule de Taylor-Young (4.2.2, 2°) s'applique, et se réduit à :

$$\lim_{t \to a,\, t \neq a} \frac{f(t)-f(a)}{(t-a)^n} = \frac{1}{n\,!} f^{(n)}(a).$$

D'où l'existence de $V \in \mathcal{V}(a)$, inclus dans U, tel que :

$$\forall\, t \in V \qquad \operatorname{sgn}(f(t)-f(a)) = \operatorname{sgn}[(t-a)^n f^{(n)}(a)]. \qquad \square$$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. — *Soit f, définie sur $U \in \mathcal{V}(a)$, n fois dérivable en a, $n \geqslant 2$, telle que :*

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } 2 \leqslant k \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Alors la courbe C d'équation $y = f(x)$ « traverse » sa tangente au point $(a, f(a))$, si, et seulement si n est impair : on dit alors que $(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** *de C.*

Soient M et P les points de C et de la tangente en $(a, f(a))$ d'abscisse commune t (le lecteur est prié de dessiner une figure). On a ainsi :

$$\overline{PM} = f(t) - (f(a) + (t-a)f'(a)).$$

En posant $\overline{PM} = g(t)$ on définit une fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui vérifie les conditions d'application du théorème II. $\square$

REMARQUE. — La fonction f définie par :

$$f(t) = t^2 \sin\frac{1}{t} \quad \text{si} \quad t \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

admet 0 pour dérivée au point 0, ainsi qu'on le constate en utilisant :

$$\left| t \sin\frac{1}{t} \right| \leqslant |t|.$$

Dans ce cas, la courbe C admet la droite $(O, \vec{i})$ pour tangente en 0 mais, sur tout $V \in \mathcal{V}(0)$, elle traverse une infinité de fois cette tangente.

5.3.2. Séparation des zéros ; signe d'une fonction

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de Banach. Aux 2° et 3°, nous nous limiterons au cas $E = \mathbb{R}$.

1° ***Zéro d'une fonction.*** — DÉFINITION. — **Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers E et a un réel. On dit que a est zéro de la fonction f, ou racine de l'équation $f(t) = 0$, si et seulement si $f(a) = 0$.**

DÉFINITION II. — **Soit a un zéro de la fonction f, de $\mathbb{R}$ vers E, définie sur $U \in \mathcal{V}(a)$. On dit que a est un zéro d'ordre n de f si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les fonctions f et $t \longmapsto (t-a)^n$ soient semblables au voisinage de a, ce qui signifie (5.1.2, 4°) qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et $V \in \mathcal{V}(a)$ inclus dans U tels que :**

$$\forall t \in V \setminus \{a\} \qquad \alpha \leqslant \frac{\|f(t)\|}{|(t-a)^n|} \leqslant \beta.$$

On en déduit que *lorsque l'ordre du zéro a existe, il est unique, et il existe un voisinage de a sur lequel a est le seul zéro de f.*

EXEMPLES. — *a)* f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = (2+\sin 1/t)t^2$ si $t \neq 0$, et $f(0) = 0$, admet $a = 0$ pour zéro d'ordre 2.

b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = (1/2+\sin 1/t)t^2$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$, admet $a = 0$ pour zéro, mais ici l'ordre n'est pas défini.

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t \ln |t|$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet $a = 0$ pour zéro, mais ici l'ordre n'est pas défini.

THÉORÈME. — **Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers E définie sur $U \in \mathcal{V}(a)$, n fois dérivable en a, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Alors a est zéro d'ordre n de f si, et seulement si la condition suivante est remplie :**

$$f^{(m)}(a) = 0 \textbf{ pour } 0 \leqslant m \leqslant n-1, \quad \textbf{et} \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

(étant entendu que $f^{(0)}(a)$ désigne $f(a)$).

L'existence de $f^{(n)}(a)$ implique (5.2.4) celle du développement limité à l'ordre n, au voisinage de a :

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

— Si tous les coefficients du polynôme $P_n(t)$ sont nuls, alors, au voisinage de a : $f(t) = o(t-a)^n$; a n'est pas zéro d'ordre n de f.

— Dans le cas contraire, il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $0 \leqslant p \leqslant n$ et que

$$t \longmapsto \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)$$

soit partie principale de f au voisinage de 0. Si $p = 0$, a n'est pas zéro de f ; si $1 \leqslant p \leqslant n$, a est zéro d'ordre p. □

REMARQUE. — Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(t) = \exp(-1/t^2)$ si $t \neq 0$, $f(0) = 0$.

Nous avons vu (4.2.1 *in fine*) que cette application, de classe C^∞, admet des dérivées de tous ordres nulles au point $a = 0$. On ne peut parler de l'ordre du zéro 0 de f.

2° ***Signe d'une fonction.*** — *a*) Soit f une application continue d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$; associons-lui l'application sgn $\circ f$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, s'il existe $(a, b) \in I^2$, $a < b$, tel que $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors f admet au moins un zéro sur $]a, b[$. Il en résulte que si f n'admet qu'un nombre fini de zéros, sgn $\circ f$ est une application en escalier.

— Inversement soit $a \in \mathring{I}$ un zéro d'ordre n de f; il existe $V \in \mathcal{V}(a)$, inclus dans I tel que a soit le seul zéro de f sur V (cf. 1°) ; on constate aisément que selon que n est impair ou pair les valeurs prises par sgn $\circ f$ sur $V \cap]a, +\infty[$ et sur $V \cap]a, -\infty[$ sont distinctes ou égales : dans le premier cas on dit que *f change de signe* au point a.

b) Retenons qu'*une fonction continue par intervalles ne peut changer de signe qu'en un point de discontinuité ou en un zéro.*

3° ***Le problème de la séparation des zéros.*** — Soit f une fonction de classe C^k (k aussi grand que cela est nécessaire). Il s'agit de déterminer le nombre des zéros de f et — si possible — d'associer à chacun d'eux un sous-ensemble de D_f sur lequel il est l'unique zéro de f.

On se sert du *tableau de variation* de f, mais pour construire celui-ci on est conduit à séparer les zéros de f', voire de f''... Lorsque l'on a obtenu une dérivée dont tous les zéros sont connus, on utilise le cheminement inverse, ce qui n'est pas toujours possible.

Certains artifices de calcul peuvent être utiles. On remarque que, par exemple, si u, v, w sont des fonctions rationnelles et p et q des entiers positifs, les zéros de :

$$f_1 = u^p + v^q; \qquad f_2 = u\, e^w + v; \qquad f_3 = u \ln w + v$$

sont les zéros communs à u et v, et, respectivement les zéros de :

$$g_1 = u^p v^{-q} + 1; \qquad g_2 = uv^{-1} e^w + 1; \qquad g_3 = \ln w + u^{-1} v.$$

Ces fonctions ont des dérivées dont les zéros sont les racines d'équations algébriques.

5.3.3. Calcul approché d'un zéro d'une fonction

On aura à utiliser une calculatrice programmable ou un ordinateur.

1° ***Position du problème.*** — On considère une application continue f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont on a su séparer les zéros. Soit $[a, b] \subset I$, $a < b$, tel que $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique zéro $r \in]a, b[$ de f. Il s'agit d'encadrer r par deux réels dont la différence vérifie l'une des deux conditions suivantes :

— elle n'excède pas $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ donné (compatible avec les possibilités de la machine), c'est le calcul approché à la précision α (en général $\alpha = 10^{-p}$),

— elle est aussi petite que le permet la machine.

2° ***La méthode de dichotomie.*** — On part de $[a_0, b_0] = [a, b]$ de milieu μ_0; si $f(\mu_0) \neq 0$ on désigne par $[a_1, b_1]$, de milieu μ_1, celui des segments $[a_0, \mu_0]$ ou $[\mu_0, b]$ qui contient r.

En itérant, on construit une famille de segments $[a_n, b_n]$, le milieu μ_n de $[a_n, b_n]$ étant une valeur approchée de r à la précision $(b-a)2^{-n}$. La construction s'arrête lorsqu'on atteint un $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(\mu_N) = 0$ (ce qui est exceptionnel) ou que la précision de la machine ne permet pas de connaître sgn $(f(u_N))$.

Dans la pratique, la méthode de dichotomie est un appoint, permettant d'initialiser favorablement l'un des algorithmes que nous allons maintenant étudier.

3° ***La méthode d'itération.*** — Nous renforçons les hypothèses du 1° en supposant que f est C^2 et que :

— ou bien $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et $f'(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$,

— ou bien $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ et $f'(t) < 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Il existe ainsi un unique zéro $r \in]a, b[$ *de* f et il est simple.

Notations. — **Pour tout $t \in [a, b]$, S_t désigne le segment d'extrémités r et t. En outre on dispose de :**

$$m = \inf_{a \leqslant t \leqslant b} |f'(t)| \in \mathbb{R}_+^*; \qquad M = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f''(t)|.$$

Principe. — Soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, ne prenant pas la valeur 0; on lui associe $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 par $\varphi(t) = t - f(t)/g(t)$; r est ainsi l'unique point fixe de φ (cf. 1.3.3, 2°).

S'il existe $c \in [a, b]$ vérifiant la double condition :

$$(*) \begin{cases} (u_0 = c) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} = \varphi(u_n)) \text{ définit une suite } U_c & (1) \\ \text{la suite } U_c \text{ converge} & (2) \end{cases}$$

alors, la suite U_c prenant ses valeurs dans le fermé $[a, b]$, sa limite est un point de $[a, b]$ et, par continuité de f, c'est r.

Notons que (1) est remplie si l'on choisit c sur une partie de $[a, b]$ stable par φ.

Nous allons maintenant étudier un cas favorable.

• Proposition. — **Si $|\varphi'(r)| < 1$, il existe un sous-segment de $[a, b]$ de la forme $S = [r - \eta, r + \eta]$, $\eta > 0$, tel que tout $c \in S$ la suite U_c converge vers r.**

On fixe $k \in]|\varphi'(r)|, 1[$; par la continuité de φ, il existe $\eta > 0$ assez petit pour que $S = [r - \eta, r + \eta]$ soit inclus dans $[a, b]$ et que $|\varphi'(t)| \leqslant k$ pour tout $t \in S$.

Pour tout $t \in S$ on a (accroissements finis et $\varphi(r) = r$) :

$$|\varphi(t) - r| \leqslant k\,|t - r| \tag{3}$$

D'où la stabilité de S; $c \in S$ ayant été fixé, U_c existe et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - r| \leqslant k^n\,|c - r| \tag{4}$$

D'où la convergence de la suite U_c vers r. □

Notons qu'ici φ est k-contractante sur S et que le théorème du point fixe (**2.4.3**) fournit la majoration de l'erreur de méthode :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - r| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\,|\varphi(c) - c|$$

qui a sur (4) l'avantage de ne pas faire intervenir r.

Notons aussi que, d'après $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ et $r = \varphi(r)$, toute suite U_c, $c \in S$, vérifie (si $c \neq r$) :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1} - r}{u_n - r} = \varphi'(r), \quad \text{où} \quad \varphi'(r) = 1 - \frac{f'(r)}{g(r)} \tag{5}$$

Cas où $0 < |\varphi'(r)| < 1$. — **Il existe ici** $S' = [r - \eta', r + \eta']$, $0 < \eta' \leqslant \eta$ **tel que pour tout** $c \in S' \setminus \{r\}$ **la suite convergente** U_c **soit monotone si** $\varphi'(r) > 0$, **oscillante si** $\varphi'(r) < 0$ (auquel ces deux u_n consécutifs encadrent r) **et qu'elle vérifie :**

Pour n **assez grand, à chaque pas la précision est pratiquement multipliée par** $|\varphi'(r)|$; **on dit que la convergence est linéaire, ou d'ordre** 1.

Reprenons la démonstration précédente et ajoutons

la continuité de φ' au point r fait qu'il existe $\eta' \in]0, \eta]$ tel que :

$$\forall t \in [r - \eta', r + \eta'] \qquad \operatorname{sgn} \varphi'(t) = \operatorname{sgn} \varphi'(r)$$

D'où la monotonie de φ sur S' et d'après **1.3.2**, 2° ses conséquences sur U_c pour $c \in S'$. Reste à utiliser (5) avec $\varphi'(r) \neq 0$.

Complément. — Toujours dans le cas $0 < |\varphi'(r)| < 1$, on a :

Au voisinage de $+\infty$: $\qquad u_n - r \sim \lambda(\varphi'(r))^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$ (5')

La démonstration est délicate. On commence par constater que $v_n = (u_n - r)/(\varphi'(r))^n$ a un signe fixe. On montre ensuite, en utilisant la formule de Taylor que :

$$0 < v_{n+1}/v_n = 1 + O(u_n - r) = 1 + O(k^n), \quad 0 < k < 1.$$

Anticipant sur IV-**1.9.1**, on en déduit que le produit infini $\pi(v_{n+1}/v_n)$ est absolument convergent, et donc convergent et qu'il existe $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lambda$, $\lambda \neq 0$. □

Il est clair que (5') en dit plus que (5).

Cas où $\varphi'(r) = 0$. — On utilise la proposition, en ajoutant que si φ et donc φ est de classe C^2, on a (par Taylor) :

$$\varphi(t) - r = \frac{1}{2}\,\varphi''(\xi)(t - r)^2$$

et à (5) on adjoint, pour toute suite U_c, $c \in S\{r\}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1} - r}{(u_n - r)^2} = \frac{1}{2}\,\varphi''(r).$$

En général $\varphi''(r) \neq 0$; on dit que **la convergence est quadratique ou d'ordre 2** (il est clair qu'elle est plus rapide qu'une convergence linéaire).

• ***Pratique du calcul lorsque la condition*** $|\varphi'(r)| < 1$ ***est remplie.*** — *A partir d'un point* $u_0 = c$ *de* $[a, b]$ *que l'on estime assez proche de* r *pour qu'il appartienne au segment* S *de la théorie, on fait tourner l'algorithme de la méthode d'itération jusqu'à ce que la suite* U_c *se stabilise* (à la précision de la machine). *On obtient ainsi une valeur approchée* r^* *de* r. *Si la machine permet d'affirmer :*

$$f(r^* - 10^{-p})\cdot f(r^* + 10^{-p}) < 0, \quad p \in \mathbb{N}^* \text{ donné,}$$

alors on a obtenu la précision 10^{-p}.

Notons que le calcul de f' a été indispensable, mais que ceux de m et de f'' sont inutiles.

• Nous allons maintenant exposer trois cas d'utilisation de la méthode, avec des « bons choix » de la fonction φ, conditionnés par le fait que l'on a intérêt à minimiser $|\varphi'(r)|$.

4° ***La méthode de Newton (ou méthode des tangentes).*** — On adopte ici :

$$\varphi(t) = t - f(t)/f'(t) \tag{6}$$

Géométriquement, $\varphi(t)$ est l'abscisse du point d'intersection de $(O, \vec{i})$ et de la tangente au graphe Γ de f, au point $(t, f(t))$; *le lecteur est prié de faire toutes les figures qui lui paraîtront nécessaires.*

• ***Étude de la fonction*** φ. — Elle est C^1 sur $[a, b]$ et $\varphi'(r) = 0$; on se trouve dans les conditions optimales du 3°.

Pour tout $t \in [a, b]$, nous avons :

$$f(r) = 0 = f(t) + (r - t)f'(t) + 1/2\cdot(r - t)^2 f''(\xi)$$

et :
$$0 = f(t) + (\varphi(t) - t)f'(t)$$

et donc :
$$\varphi(t) - r = \frac{f''(\xi)}{2f'(t)}(t - r)^2 \tag{7}$$

• ***Cas où*** $\mathrm{sgn}\circ f''$ ***est constante sur*** $[a, b]$. — PROPOSITION. — **Alors, si** $c \in [a, b] \setminus \{r\}$ **est choisi de façon que** $\mathrm{sgn}\ f(c) = \mathrm{sgn}\ f''$, **le segment** S_c **est stable par** f, **la suite** U_c **est définie, monotone et bornée; elle converge vers** r.

Pour tout $t \in S_c \setminus \{r\}$, on a :

— par continuité : $\mathrm{sgn}\ f(t) = \mathrm{sgn}\ f(c) = \mathrm{sgn}\circ f''$

— par (6) et (7) : $(\varphi(t) - r)\cdot(\varphi(t) - t) = -\dfrac{1}{2} f(t)f''(\xi)(t - r)^2$

— et donc : $(\varphi(t) - r)\cdot(\varphi(t) - t) < 0$, et $\varphi(t) \in \overset{\circ}{S}_t \subset S_c \setminus \{r\}$

On en déduit aisément la proposition. □

• ***Majoration de l'erreur.*** — De (7) on déduit :

$$\forall (q, s) \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{M}{2m}|u_{q+s} - r| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|u_q - r|\right)^{2^s} \tag{8}$$

La convergence risque d'être lente au début, mais elle s'accélère rapidement. En effet :

$$\textbf{si} \quad |u_q - r| \leqslant \frac{2m}{M}\, 10^{-p}, \quad \textbf{alors} \quad |u_{q+1} - r| \leqslant \frac{2m}{M}\, 10^{-2p}$$

La convergence est quadratique.

$\left(\text{Par dichotomie, on essaiera de partir de } u_0 = c \text{ tel que } |c - r| \leqslant \frac{2m}{M}\, 10^{-1}\right)$.

• ***Cas général.*** — Compte tenu de $\varphi'(r) = 0$ et de 3° : **pour $|c - r|$ assez petit, U_c existe, converge vers r et (8) reste valable.**

• ***Pratique.*** — Voir 3°.

5° ***La méthode d'ajustement linéaire.*** — On adopte ici : $\varphi(t) = t - \dfrac{f(t)}{\mu}$, où μ est une constante non nulle.

Géométriquement, $\varphi(t)$ est l'abscisse du point d'intersection de $(O, \vec{i})$ et de la droite de pente μ qui contient le point $(t, f(t))$ du graphe Γ.

Nous convenons d'adopter : $\mu = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma \in]a, b[$ tel que $\mu = f'(\gamma)$. Pour tout $t \in [a, b]$, nous avons (encore par Rolle) :

$$\varphi'(t) = \frac{f'(\gamma) - f'(t)}{f'(\gamma)} = \frac{f''(\xi)}{f'(\gamma)}(\gamma - t), \ \xi \text{ entre } \gamma \text{ et } t,$$

et donc : $|\varphi'(t)| \leqslant k$, où $k = \dfrac{M}{m}(b - a)$; en particulier $|\varphi'(r)| \leqslant k$.

En utilisant la formule des accroissements finis, il vient :

$$\forall t [a, b] \qquad |\varphi(t) - r| \leqslant k\,|t - r| \qquad (\text{car } \varphi(r) = r) \tag{9}$$

Quitte à utiliser si nécessaire la méthode de dichotomie, on peut supposer que l'intervalle initial $[a, b]$ vérifie :

$$(b - a) < m/M, \text{ i.e. } 0 < k < 1$$

(on se trouve dans le cas favorable du 3°, puisque $|\varphi'(r)| < 1$).

Soit S le plus grand sous-segment de $[a, b]$ qui est centré en r (il contient a ou b). Par (9) on constate que S est stable par φ; pour tout $c \in S$, la suite U_c existe et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - r| \leqslant k^n |c - r|, \qquad 0 < k < 1$$

ce qui montre qu'elle converge vers r.

• ***Majoration de l'erreur.*** — En général $\mu \neq f'(r)$ et $0 < |\varphi'(r)| \leqslant k$. Par 3° :

La convergence est linéaire et :
au voisinage de $+\infty$: $\quad u_n - r \sim \lambda(\varphi'(r))^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$ (5′)

On a ici : $$\varphi'(r) = \frac{f'(\gamma) - f'(r)}{f'(\gamma)} = (\gamma - r)\,\frac{f''(\beta)}{f'(\gamma)}.$$

Pourvu que $(b - a)$ soit assez petit, on peut écrire (cf. exercice **4**.31) : $\gamma \simeq (a + b)/2$ et en déduire :

$$\varphi'(r) \simeq \left(\frac{a+b}{2} - r\right) f''(r)/f'(r).$$

Pour minimiser $|\varphi'(r)|$, on a donc intérêt à partir d'un couple $[a, b]$ dont le milieu soit aussi près que possible de r. Pour cela on détermine un couple (a', b') tel que $a' < r < b'$ et $b' - a' < m/M$. Si $(f(a')|$ et $|f(b')|$ sont voisins, on adopte $(a, b) = (a', b')$. Sinon, et si par exemple $|f(a')| < |f(b')|$ on adopte $(a, b) = (a', 2r^* - a')$, où r^* est la valeur approchée de r fournie par une interpolation linéaire sur $[a', b']$ (cf. **4**.6.*1*, 3°). On notera que le segment S est ainsi « voisin » de $[a, b]$ et qu'il est commode de partir de $u_0 = r^*$.

REMARQUE. — Une variante consiste à adopter $\mu = f'(\gamma)$, $\gamma \in [a, b]$.

6° ***La méthode d'interpolation linéaire (ou des sécantes).*** — On adopte ici : $\varphi(t) = t - f(t)/g(t)$, avec :

$$g(t) = \frac{f(b) - f(t)}{b - t} \quad \text{si} \quad t \in [a, b[, \quad \text{et} \quad g(b) = f'(b).$$

Géométriquement, $\varphi(t)$ est l'abscisse du point d'intersection de $(O, \vec{i})$ et de la droite définie par les points $(b, f(b))$ et $(t, f(t))$ de Γ (remplacée par la tangente à Γ au point $(b, f(b))$ si $t = b$).

• ***Étude de la fonction*** φ. — D'après le théorème de la division qui ne sera démontré qu'au **6**.7.*2*, 6° g, et donc φ, est C^1 sur $[a, b]$. Pour tout $t \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b]$ tel que $g(t) = f'(\xi)$ et on a : $\operatorname{sgn} g(t) = \operatorname{sgn} \circ f'$.

Pour $t \in [a, b[$, on a : $\varphi(t) - r = \dfrac{1}{g(t)} \cdot \dfrac{\psi(t)}{b - t}$, avec :

$$\psi(t) = (t - r) f(b) - (b - r) f(t)$$

ψ est C^2 et admet les deux zéros r et b. Par le **6**.7.*2*, 6°, *c*), on obtient, compte tenu de $\psi''(t) = -(b - r) f''(t)$:

$$\forall t \in [a, b] \qquad \psi(t) \leqslant \frac{M}{2}(b - r)|(t - r)(t - b)|.$$

En utilisant $|g(t)| \geqslant m$, on obtient, en faisant d'abord $t \neq b$, puis $t = b$ (en remarquant que $\varphi(b) - r$ est le même que dans la méthode de Newton) :

$$\forall t \in [a, b] \qquad |\varphi(t) - r| \leqslant \frac{M}{2m}(b - r)\,|t - r|. \tag{10}$$

• ***Cas où*** $\operatorname{sgn} \circ f''$ ***est constante sur*** $[a, b]$. — PROPOSITION. — **Si** $\operatorname{sgn} f' = \operatorname{sgn} f'' = \varepsilon \in \{-1, 1\}$, **alors, pour tout** $c \in [a, b] \setminus \{r\}$, **la suite** U_c **est définie, monotone et bornée; elle converge vers** r.

Pour $t \notin \{r, b\}$, on a : $\dfrac{\varphi(t) - r}{\varphi(t) - t} = -\dfrac{\psi(t)}{(b - t) f(t)}$.

Ici $\operatorname{sgn} \circ \psi'' = -\varepsilon$; ψ est concave si $\varepsilon = 1$ et convexe si $\varepsilon = -1$; r et b sont ses seuls zéros, et :

$$\forall t \notin \{r, b\} \qquad \operatorname{sgn} \psi(t) = \varepsilon \operatorname{sgn}(t - r) = \operatorname{sgn} f(t)$$

D'où, en faisant successivement $t \notin \{r, b\}$ et $t = b$:

$$\forall t \in [a, b] \setminus \{r\} \qquad \varphi(t) \in \overset{\circ}{S}_t$$ □

Majoration de l'erreur lorsque sgn $f' =$ sgn $f'' = \varepsilon$. On a :

$$1 - \varphi'(r) = \frac{f'(r)}{f'(\gamma)} \quad \text{et} \quad \varphi'(r) = \frac{f'(\gamma) - f'(r)}{f'(\gamma)} = \frac{f''(\beta)}{f'(\gamma)}(\gamma - r)$$

avec $r < \gamma < b$ et $r < \beta < \gamma$. D'où $0 < \varphi'(r) < 1$, et, par 3° :

La convergence est linéaire, et :

au voisinage de $+\infty$: $\quad u_n - r \sim \lambda(\varphi'(r))^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$ (5')

$$\text{On a : } \varphi'(r) = \frac{f(b) - f(r) - (b - r)f'(r)}{f(b) - f(r)} = \frac{1/2 \cdot (b - r)^2 f''(\delta)}{(b - r)f'(\gamma)} \tag{11}$$

et, pourvu que b soit assez voisin de r, on peut adopter :

$$\varphi'(r) \simeq \frac{b - r}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)}.$$

Si sgn $f' = -$ sgn f'', la proposition reste valable à condition d'échanger les rôles de a et b, i.e. d'adopter

$$g(t) = \frac{f(a) - f(t)}{a - t} \quad \text{si} \quad t \in]a, b] \quad \text{et} \quad g(a) = f'(a).$$

Cas général. — Par dichotomie, on fait en sorte que :

$$k < 1, \quad \text{où } k \text{ est ici : } \quad (M/2m) \,.\, (b - a)$$

Grâce à (10), on a ainsi :

$$\forall t \in [a, b] \qquad |\varphi(t) - r| \leqslant k|t - r|, \qquad 0 < k < 1$$

U_c converge vers r pour tout $c \in S$, où S est le plus grand sous-segment de $[a, b]$ qui est centré en r. Grâce à (11), qui reste valable, on a $|\varphi'(r)| < 1$; la majoration de l'erreur est la même que dans le cas où sgn f'' est constante (au moins si $f''(r) \neq 0$).

7° ***Comparaison des trois méthodes.*** — La convergence y étant quadratique au lieu de linéaire, la méthode de Newton est en général la meilleure.

En faveur de la méthode d'ajustement linéaire, il faut cependant considérer que c'est elle qui exige le moins de calculs pour passer de u_n à u_{n+1} ($f(u_n)$ au lieu de $f(u_n)$ et $f'(u_n)$ ou de $f(u_n)$ et $(f(b) - f(u_n))/(b - u_n)$). Elle peut être commode dans certains cas. *En tout cas (surtout si on l'utilise à partir d'un segment $[a, b]$ dont le milieu est voisin de r) elle est meilleure que la méthode d'interpolation linéaire.*

EXEMPLE DE CALCUL. — *Soit à étudier la fonction :*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad t \longmapsto e^{-t} - t$$

On constate : $f'(t) = -e^{-t} - 1 < 0$ et $f''(t) = e^{-t} > 0$. La fonction f admet un unique zéro $r \in]0, 1[$.

• Si on applique la *méthode de Newton* : $\varphi(t) = \dfrac{(t+1)e^{-t}}{e^{-t} + 1}$. Avec une calculatrice affichant 10 chiffres, et en partant de $u_0 = 0$, on obtient une stabilisation à partir de $u_4 = 0{,}567\,143\,290$.

Une vérification permet d'affirmer :

$$0{,}567\,143\,290 < r < 0{,}567\,143\,291 \tag{10}$$

A noter que la théorie permettait ici d'affirmer $\dfrac{M}{2m}|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{M}{2m}|u_0 - r|\right)^{2^n}$ soit, avec $m = 2$, $M = 1$ et $|u_0 - r| \leqslant 1$: $|u_n - r| \leqslant (1/4)^{2^n - 1}$.

Pour $n = 4$, on obtient $|u_4 - r| \leqslant 9{,}32 \cdot 10^{-10}$, ce qui est cohérent avec le résultat obtenu.

• Pour appliquer la *méthode d'ajustement linéaire*, il est préférable de partir de $r^* = 0{,}612\,699\,837$ obtenu par interpolation linéaire entre 0 et 1, et d'adopter $a = 22^* - b$, $b = 1$ et $\mu = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = -1{,}555\,535\,133$.

Avec $\varphi(t) = t - \dfrac{f(t)}{\mu}$ et $u_0 = r^*$, on obtient une stabilisation à partir de $u_4 = 0{,}567\,143\,290$, et donc (12).

La méthode semble ici aussi efficace que Newton, mais ceci est obtenu au prix d'une interpolation linéaire et du calcul de μ; la mise en œuvre de Newton est plus rapide.

REMARQUES. — *a*) Pour simplifier, on pourrait appliquer la méthode d'ajustement linéaire avec $u_0 = 0$ et $\mu = f'(0) = -2$. La stabilisation n'est alors obtenue qu'à partir de $n = 14$. On voit ainsi l'importance du choix de u_0 et de μ.

b) Avec une fonction aussi simple que notre fonction f, le choix d'une méthode ou d'une autre, même avec une telle différence dans le nombre de termes à calculer, ne présente pas une importance considérable. A tel point qu'une simple méthode de dichotomie serait aussi efficace.

En revanche si la fonction f demandait de nombreux calculs pour son évaluation, il en serait tout autrement. *Penser par exemple au cas où f s'exprime au moyen d'intégrales ou de sommes de séries*.

5.4. EXEMPLES D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

EXEMPLE I. — Fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t \ln t}{t^2 - 1}$.

a) $D_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$; $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0$; $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Au voisinage de 1 : $\ln t \sim (t - 1)$.

D'où $\lim\limits_{t \to 1} f(t) = 1/2$.

— Soit g la fonction obtenue en prolongeant f par : $g(1) = 1/2$.

On a : $D_g = \mathbb{R}_+^*$; g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. La fonction

$$g' : t \longmapsto \frac{(t^2 - 1) - (t^2 + 1) \ln t}{(t^2 - 1)^2}$$

admettant une limite, égale à 0, quand t tend vers 1, il en résulte que $g'(1)$ existe et vaut 0 (théorème II du 4.2.*1*, 2°).

b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{sgn} g' = \operatorname{sgn} h$ avec $h(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \ln t$.

Par rapport à g', l'avantage de h est d'avoir pour dérivée une fonction rationnelle : $h'(t) = \dfrac{-(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2}$. On en déduit :

$$\operatorname{sgn} g'(t) = \operatorname{sgn} h(t) = \operatorname{sgn}(1 - t)$$

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	0	↗	1/2	↘	0

La représentation graphique est laissée au lecteur, qui remarquera que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t)}{t} = +\infty.$$

Exemple II. — Fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t^2 - 2t - 1}{t} \exp(-1/t)$.

a) $D_f = \mathbb{R}^*$. Au voisinage de 0, f est équivalent à $t \longmapsto \dfrac{-1}{t} e^{-1/t}$, et donc $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t) = +\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, f est équivalent à $t \longmapsto t$, et donc :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty, \qquad \lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty.$$

b) Calculons : $f'(t) = \dfrac{(t+1)^2 (t-1)}{t^3} \exp(-1/t)$. D'où :

t	$-\infty$		-1			0			1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$+$		‖		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	$-2e$	↗	$+\infty$	‖	0	↘	$-2/e$	↗	$+\infty$

c) En utilisant un développement limité de $x \longmapsto e^x$ au voisinage de 0, on obtient les développements au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

$$f(t) = \left(t - 2 - \frac{1}{t}\right)\left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

$$f(t) = t - 3 + \frac{3}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

ce qui montre que le graphe C de f admet la droite D d'équation $y = x - 3$ pour asymptote et que, au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), C est au-dessus (resp. au-dessous) de D. Le tracé est laissé au lecteur, qui remarquera que le graphe traverse sa tangente au point $(-1, -2e)$ et que $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f(t)}{t} = 0$, ce qu'il traduira par l'existence d'une « demi-tangente » à C en $(0, 0)$.

EXERCICES

Pour alléger les écritures, nous avons en général écrit $f(t)$ au lieu de $t \longmapsto f(t)$.

Développements asymptotiques

5.01. — Pour chacune des fonctions mentionnées ci-dessous, chercher si elle admet une limite au point a (donné en même temps que la fonction).

$a = \pi/4$	$\operatorname{tg} 2t \cdot \ln(\operatorname{tg} t)$	$a = \pi/2$	$(\operatorname{tg} t - 1)(1 - \operatorname{tg} t/2)$
$a = 0$	$1/t \cdot \ln(\cos t)$	$a = 0$	$(e^t + t)^{1/t}$
$a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$	$\dfrac{a^t - t^a}{\log_a t - \log_t a}$	$a = 0$	$\dfrac{b^b - (b+t)^b}{(b+t)^{b+t} - b^b}$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$
$a = \pi/2$	$\cos t \cdot e^{\frac{1}{1 - \sin t}}$	$a = \pi/6$	$\dfrac{\operatorname{Arc\,tg}(2 \sin t) - \pi/4}{\cos 3t}$
$a = 0$	$(\operatorname{tg} t/t)^{1/t^2}$	$a = 0$	$(\cos t)^{\operatorname{cotg} t^2}$
$a = 0$	$\dfrac{\operatorname{Arc\,cos}(1-t)}{\sqrt{t}}$	$a = 1$	$\dfrac{\sin(\ln t) - [-\ln(\sin \pi t/2)]^{\frac{1}{2}}}{t - 1}$
$a = +\infty$	$\dfrac{\operatorname{ch} t}{1 + \operatorname{sh} t}$	$a = +\infty$	$\ln t \cdot \left[\left(\dfrac{\ln(1+t)}{\ln t}\right)^t - 1\right]$
$a = 1$	$\dfrac{\cos \alpha t - \cos \alpha}{\exp(-\alpha t^2) - \exp(-\alpha)}$	$a = +\infty$	$\operatorname{sh}\sqrt{t^2 + t} - \operatorname{sh}\sqrt{t^2 - t}$
$a = +\infty$	$\left(\dfrac{\operatorname{Arctg}(t+1)}{\operatorname{Arctg} t}\right)^{t^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\left(2 - \dfrac{t}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2a}}$
$a = +\infty$	$t - t^2 \ln(1 + 1/t)$	$a = 1$	$\left(\dfrac{\alpha + t}{\alpha + 1}\right)^{t/(1-t)}$

5.02. — Limite éventuelle de la suite de terme général

$$n(\sqrt[n]{5} - 1)\,; \quad (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n\,; \quad (\cos(\alpha + \beta/n)/\cos\alpha)^n$$
$$n^{(n+1)/n} - (n-1)^{n/(n-1)}\,; \quad (1 + i/n)^n + (1 - i/n)^n$$

5.03. — Pour chacune des fonctions mentionnées ci-dessous, chercher un développement limité à l'ordre n (donné en même temps que la fonction).

a) *Au voisinage de* 0 :

$n = 5$	$\dfrac{1}{t} \ln \operatorname{ch} t$	$n = 5$	$\operatorname{Arg\,th}(\sin t)$
$n = 2$	$\operatorname{Arc\,cos}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)$	$n = 2$	$\exp\left(\dfrac{1}{t} \ln \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{t}}{\cos\sqrt{t}}\right)$
$n = 2$	$\ln(\alpha^t + \beta^t)$	$n = 2$	$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + t}}}$
$n = 5$	$\operatorname{Arg\,sh}(e^t)$	$n = 4$	$(1 - t + t^2)^{1/t}$
$n = 5$	$\cos(\operatorname{Arc\,sin} t)$	$n = 5$	$\ln\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

b) *Au voisinage de* $\pi/4$:

$n = 3 \quad \sqrt{\operatorname{tg} t}$ $\qquad\qquad$ $n = 3 \quad (\operatorname{tg} t)^{\operatorname{tg} 2t}$

5.04. — Trouver (si elles existent) les parties principales au voisinage de 0, dans l'échelle puissance, des fonctions :

$\sin(\operatorname{Arc\,tg} t) - \operatorname{Arc\,tg}(\sin t)$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(\sin t) - \sin(\operatorname{tg} t)$

$(1+t)^{1/t} - \exp(1/(1+t))$ $\qquad$ $(e+t)^e - e^{e+t}$

$t - \dfrac{\alpha+\beta\cos t}{\gamma+\delta\sin t}$ $\qquad$ $(\cos t)^{\operatorname{cotg} t} + \alpha - \beta t - \gamma t^2 - \delta t^3$

(dans les deux derniers cas on déterminera $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ pour obtenir un ordre aussi élevé que possible).

5.05. — Pour chacune des deux fonctions :

$(1+1/t)^{t^{1/t}}$ $\qquad$ $(1+t)^{1/t}$

donner le développement asymptotique au voisinage de $+\infty$, dans l'échelle

$$(t^\alpha \ln^\beta t)_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2},$$

à la précision $1/t^3$.

5.06. — Développement asymptotique de $t \longmapsto (\ln(t + \sqrt{1+t^2}))^{1/t}$ au voisinage de $+\infty$ (on choisira l'échelle et la précision).

5.07. — On considère l'équation : $t = \operatorname{tg} t$. Montrer qu'elle admet une racine unique $t_n \in]n\pi, n\pi+\pi/2[$, pour $n \geqslant 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et qu'au voisinage de $+\infty$, $t_n \sim n\pi$. F[illegible]ier la limite éventuelle de la suite $(t_n - n\pi)$. Montrer que t_n admet dans l'échelle $(n^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un développement asymptotique de précision $1/n^3$. Le déterminer.

5.08. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant au voisinage de 0 un développement limité de la forme : $t - at^p$ $(a > 0,\ p > 1)$.

On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par x_0 et par : $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

On suppose : $(\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq 0)$ et $\lim x_n = 0$.

Rechercher un développement asymptotique de x_n, au voisinage de $+\infty$, dans une échelle à déterminer. On pourra utiliser :

$$\sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k), \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{1}{x_n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{N}$$

***5.09.** — L'équation $\operatorname{ch} y - \sqrt[4]{1+2y} = x$ détermine une fonction implicite $y = \psi(x)$, telle que $\psi(0) = 0$. En donner un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.

5.10. — L'équation $y^5 + y = x$ admet, dans un voisinage convenablement choisi de $+\infty$, une et une seule racine réelle $\psi(x)$ qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. En donner un développement asymptotique dans l'échelle $(x^n)_{n\in\mathbb{Q}}$ à la précision $x^{-7/5}$.*

5.11. — Etudier les branches infinies des représentations graphiques des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$(t-1)e^{1/t+1}$ $\qquad$ $(t+\sqrt{t})e^{\sqrt{t^2+t}-t}$

$(t-1)e^{1/t-1}$ $\qquad$ $(t^3-2t^2)e^{1/t}$

Séparation de zéros

5.12. — Montrer que la fonction $t \longmapsto [(t^2-1)^n]^{(n)}$ a n zéros réels, compris entre 1 et -1.

5.13. — Séparer les zéros de chacune des fonctions (en discutant, s'il y a lieu, suivant les valeurs du paramètre réel m, ou du paramètre naturel n) :

$(t-1)e^t-(t+1)e^{-t}$ $\qquad$ $nt^n+t^{n-1}+\ldots+t+1$

$e^t-\left(1+\frac{t}{1!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)$ $\qquad$ $5t^8-72t^5+160t^2-1$

$t^4+mt^3+4t^2-1$ $\qquad$ $(t^2+3mt+2)\ln t-2t-3m$

5.14. — Soit la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \longmapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $a_m = 0$ et $a_{m-1} \cdot a_{m+1} > 0$. Montrer que la fonction ne peut avoir n zéros.

5.15. — Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, polynôme de degré n qui a n zéros (réels). Etudier le nombre des zéros de la fonction polynôme $g = n f \cdot f'' - (n-1)(f')^2$.

5.16. — Montrer que la fonction polynôme $t \longmapsto 1 + \sum_{k=3}^{n} a_k t^k$ ne peut avoir n zéros.

5.17. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} ; \qquad f_{n+1} = \frac{3-f_n^2}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n a exactement deux zéros.

b) Montrer que les courbes d'équation $y = f_n(x)$ ont quatre points communs.

5.18. — Montrer que la dérivée d'ordre n de la fonction

$$t \longmapsto 2t \operatorname{Arc\,tg} t - \ln(1+t^2)$$

admet $n-2$ racines réelles, pour $n \geqslant 2$.

5.19. — *a*) Etudier l'équation $a^x = x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ est donné. Etudier la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = a^{u_n}$ et $u_0 = a$ lorsque $a > 1$.

b) On suppose $0 < a < 1$. Etudier l'équation $a^{(a^x)} = x$. Etudier la suite définie comme au *a*).

5.20. — Soit $m > 1$. Montrer que l'équation :

$$m \ln\left(1+\frac{x}{m+1}\right)=x$$

a une racine $x_m \in]-2, -1[$. Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m$.

ETUDE GLOBALE DE FONCTIONS

5.21. — Etudier et représenter graphiquement les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$t^{t-t^2} \qquad (1-1/t^2)^{-2t^2}$$

$$\left(\frac{e^t+1}{2}\right)^{1/t} \qquad 2^{t-1/t}$$

$$e^t\left(\frac{1}{t^4}+\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{6t^2}+\frac{1}{6t}\right) \qquad (t-a)^{2/3}(b-t)^{1/3} \quad (0 < a < b)$$

$$\sqrt{1-t^2}\ \text{Arc tg}\ t \qquad \frac{1+t^2}{t^3}\left(\text{Arc tg}\ t-\frac{t}{1+t^2}\right)$$

$$|\text{tg}\ t|^{\cot t} \qquad (1+\sin t)^{1/\sin t}$$

$$(\text{tg}\ t)^{\sin t} \qquad (t^2-1)\ln(1+1/t)$$

$$(t^2-1)\ln(1+1/t) \qquad \ln(e^{2/t}-3\,e^{1/t}+2)$$

$$\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t} \qquad t^{1/t^2-t^2}$$

$$\log_t(1+t) \qquad \frac{1}{\text{Arc sin}\ t}-\frac{1}{t}$$

$$e^{1/t}\sqrt{t(t+2)} \qquad (t+2-1/t)\ \text{Arc tg}\ t$$

$$(t-3)\exp[1/(t-2)] \qquad \frac{t^2+1}{t-1}\,e^{1/t}$$

5.22. — Etudier et représenter graphiquement les familles de fonctions, indexées par α, qui décrit une partie convenablement choisie de $\mathbb{R}$:

$$t^\alpha \ln t \qquad \frac{t-\alpha}{\text{th}\ t}$$

$$\frac{1}{\text{ch}\ t+\text{ch}\ \alpha} \qquad e^{1/t}-\alpha/t$$

$$[1/(t-\alpha)]^t \qquad [(t-\alpha)/t]^t$$

6
INTÉGRATION

> *La théorie de l'intégration envisagée ici est celle de l'intégrale de Riemann. Il s'agit dans ce chapitre* **6** *de l'intégrale simple : nous considérons des applications d'un intervalle de* $\mathbb{R}$ *dans un espace de Banach E sur le corps* $\mathbb{K}$ *des réels ou des complexes.*

6.1. INTÉGRATION DES APPLICATIONS EN ESCALIER

6.1.*1*. Subdivisions d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

1° DÉFINITION. — **Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, avec $a < b$; on appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille finie $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de points de $[a, b]$ vérifiant les deux conditions :**

i) $a_0 = a$ et $a_n = b$.

ii) $\forall\, i \in \mathbb{N}_n \quad a_{i-1} < a_i$ **(la famille est strictement croissante).**

Une telle subdivision σ comprend $n+1$ points, avec $n \geqslant 1$, et elle détermine n intervalles compacts $[a_{i-1}, a_i]$ dont aucun n'est vide ou réduit à un point. Le réel strictement positif $\delta(\sigma) = \max\limits_{i \in \mathbb{N}_n} (a_i - a_{i-1})$ est appelé le *pas* de la subdivision. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

EXEMPLE. — Pour $n \geqslant 1$, la famille $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ avec $a_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$ est une subdivision de $[a, b]$, de pas $\dfrac{b-a}{n}$.

Une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ étant par définition une application, nous pouvons lui associer son image $A(\sigma)$, qui est un sous-ensemble fini de points de $[a, b]$ contenant a et b. Réciproquement si A est un sous-ensemble fini de points de $[a, b]$ contenant a et b, nous pouvons lui faire correspondre une et une seule subdivision de $[a, b]$ dont il soit l'image : si card $A = n+1$, il s'agit de la subdivision définie par $a_0 = a$ et pour $i \in \mathbb{N}_n$, $a_i = \inf A \backslash \{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$.

2° ***Relation d'ordre sur*** $\mathcal{S}$. — DÉFINITION. — **Soient σ et σ' deux éléments de $\mathcal{S}$, d'images respectives $A(\sigma)$ et $A(\sigma')$; la subdivision σ' est dite plus fine que la subdivision σ si et seulement si $A(\sigma)$ est inclus dans $A(\sigma')$.**

Il s'agit manifestement d'une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{S}$; nous noterons $\sigma \prec \sigma'$ lorsque σ' est plus fine que σ. Notons que $\sigma \prec \sigma'$ implique $\delta(\sigma') \leqslant \delta(\sigma)$, la réciproque étant fausse.

PROPOSITION. — **$(\mathcal{S}, \prec)$ est un treillis.**

En effet, la partie de $\mathcal{S}$ constituée des deux subdivisions σ et σ' d'images $A(\sigma)$ et $A(\sigma')$ admet une borne inférieure $\sigma \wedge \sigma'$, qui est la subdivision associée à $A(\sigma) \cap A(\sigma')$, et une borne supérieure $\sigma \vee \sigma'$, qui est la subdivision associée à $A(\sigma) \cup A(\sigma')$. □

6.1.*2*. Applications en escalier sur $[a, b]$

RAPPEL. — Les applications en escalier d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un e.v.n. E ont été définies au **4.1.*3***, 5°. Nous avons signalé au **4.6.*2***, 2° qu'une application en escalier définie sur un segment ne prend qu'un nombre fini de valeurs et que, par suite, elle est bornée.

EXEMPLES. — *a*) Toute application constante est en escalier.

b) Sur $[0, 2]$, l'application $t \longmapsto E(t)$ où $E(t)$ désigne la partie entière de t, est en escalier.

REMARQUE. — Une application définie sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ peut ne prendre qu'un nombre fini de valeurs sans être en escalier. C'est le cas pour l'application caractéristique des rationnels sur $[0, 1]$.

DÉFINITION. — **Soient $f : [a, b] \longrightarrow E$ une application en escalier et $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$. On dit que σ est adaptée à f si f est constante sur chacun des intervalles ouverts $]a_{i-1}, a_i[$, $i \in \mathbb{N}_n$.**

D'après la définition d'une application en escalier, il existe au moins une subdivision adaptée à f ; d'autre part toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à f est elle-même adaptée à f ; enfin l'ensemble des subdivisions adaptées à f admet un plus petit élément : la subdivision dont l'image est constituée de l'ensemble des points de discontinuité de f auxquels on adjoint a et b.

REMARQUE. — Toute subdivision de $[a, b]$ est adaptée à toute application de $[a, b]$ dans E dont la restriction à $]a, b[$ est constante.

6.1.*3*. Intégrale d'une application en escalier

1° THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient f une application en escalier de $[a, b]$ dans un e.v.n. E, $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f, $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ les valeurs constantes de f sur les intervalles $]a_{i-1}, a_i[$. Alors l'élément $I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \lambda_i$ de E est indépendant du choix de la subdivision σ et porte le nom d'intégrale de l'application en escalier f. On le note encore $\int_a^b f$.**

Soit c un point de $[a, b]$; il existe un entier i_0 de $\mathbb{N}_n$ tel que c appartienne à $[a_{i_0-1}, a_{i_0}]$. Considérons la subdivision σ' dont l'image est obtenue en adjoignant le point c à l'image de σ et comparons $I(f, \sigma)$ et $I(f, \sigma')$; si $c = a_{i_0-1}$ ou $c = a_{i_0}$ l'égalité est triviale ; sinon il s'agit de deux éléments de E qui ne diffèrent que par les deux termes :

$$(a_{i_0}-a_{i_0-1})\,\lambda_{i_0} \qquad \text{et} \qquad (a_{i_0}-c)\,\lambda''_{i_0}+(c-a_{i_0-1})\,\lambda'_{i_0}$$

où λ'_{i_0} et λ''_{i_0} sont les valeurs constantes de f sur $]a_{i_0-1}, c[$ et $]c, a_{i_0}[$. Comme c appartient à $]a_{i_0-1}, a_{i_0}[$ on a $\lambda_{i_0} = \lambda'_{i_0} = \lambda''_{i_0}$ et en utilisant

$$a_{i_0}-a_{i_0-1} = a_{i_0}-c+c-a_{i_0-1}$$

on en déduit $I(f, \sigma') = I(f, \sigma)$. Il en résulte, par récurrence sur le nombre fini de points de $[a, b]$ à adjoindre à l'image de σ, que si $\sigma \prec \sigma'$ alors $I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$.

Enfin si σ et σ' sont deux quelconques des subdivisions adaptées à f, les deux éléments $I(f, \sigma)$ et $I(f, \sigma')$ de E sont l'un et l'autre égaux à $I(f, \sigma \vee \sigma')$. □

REMARQUES. — *a*) La donnée d'une application impliquant celle de l'ensemble sur lequel elle est définie, l'écriture $\int_a^b f$ est un pléonasme : il suffirait de noter $\int f$; ce pléonasme trouvera sa justification lorsque nous introduirons l'intégrale d'une fonction f sur un segment $[a, b]$ inclus dans l'ensemble de définition de f, (6.2.2, 2°).

b) si $f : [a, b] \to E$ est un escalier et si $g : [a, b] \to E$ ne diffère de f qu'en un nombre fini de points de $[a, b]$, alors g est en escalier et $\int_a^b f = \int_a^b g$.

En particulier toute application $g : [a, b] \to E$ qui prend la valeur k, sauf en un nombre fini de points, est en escalier et son intégrale est $(b-a)k$; ici f est la constante $t \longmapsto k$.

2° *Propriétés des applications en escalier et de leurs intégrales.*

PROPOSITION I. — **L'ensemble $\mathcal{E}$ des applications en escalier de $[a, b]$ dans un e.v.n. E est un sous-espace vectoriel de $E^{[a, b]}$; l'application $f \longmapsto \int_a^b f$ de $\mathcal{E}$ dans E est linéaire.**

— Contenant l'application nulle $[a, b] \to E$, $\mathcal{E}$ n'est pas vide. Soient (α, β) un élément de $\mathbb{K}^2$, f et g deux éléments de $\mathcal{E}$, σ et σ' deux subdivisions adaptées respectivement à f et g ; $\sigma \vee \sigma'$ est ainsi adaptée à la fois à f et g, et l'application $\alpha f+\beta g$ est constante sur tout intervalle ouvert de $\sigma \vee \sigma'$; $\alpha f+\beta g$ est ainsi en escalier.

— En calculant l'intégrale de $\alpha f+\beta g$ au moyen de $\sigma \vee \sigma'$ on obtient :

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g. \qquad \square$$

PROPOSITION II. — **Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v.n., u une application linéaire de E dans F, et $f: [a, b] \to E$ une application en escalier. Alors $u \circ f$ est une application en escalier, et on a :**

$$\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right).$$

En effet, si $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision adaptée à f et si λ_i est la valeur prise par f en tout point de $]a_{i-1}, a_i[$, alors $u \circ f$ prend la valeur $u(\lambda_i)$ en tout point de $]a_{i-1}, a_i[$; on a ensuite :

$$\int_a^b u \circ f = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, u(\lambda_i) = u\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, \lambda_i\right) = u\left(\int_a^b f\right). \quad \square$$

PROPOSITION III. — **Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v.n., $\top : E \times F \to G$ une application bilinéaire, f et g deux applications en escalier de $[a, b]$ respectivement dans E et F. Alors :**

$$f \top g : [a, b] \to G \qquad t \longmapsto f(t) \top g(t)$$

est une application en escalier.

Dans la pratique, on utilise :

$$\top : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \longmapsto xy$$

ou

$$\top : \mathbb{K} \times E \to E \qquad (\alpha, x) \longmapsto \alpha x.$$

PROPOSITION IV. — **Soit $f: [a, b] \to E$ une application en escalier. Alors**

$$\|f\| : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad t \longmapsto \|f(t)\|$$

est une application en escalier, et on a $\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$.

Les démonstrations des propositions III et IV, faciles, sont laissées au lecteur.

REMARQUE. — *Pour $v \in E$, $\|v\|$ a sa signification habituelle de norme d'un élément de l'e.v.n. E. Pour $f \in E^{[a,b]}$, $\|f\|$ désigne tantôt (et c'est le cas ici) l'application $t \longmapsto \|f(t)\|$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, tantôt la norme, ou la semi-norme d'une application (le contexte permet d'éviter toute confusion).*

COROLLAIRE I. — **Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $(a < b)$, est une application en escalier positive[1], alors l'intégrale de f est positive.**

Ici $\|f\| = f$, et donc $\int_a^b f \geqslant \left\| \int_a^b f \right\|$. $\square$

[1] Dans tout ce chapitre, nous utiliserons le fait que l'ensemble des applications d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$ est partiellement ordonné :

$f \geqslant 0$ signifie : $\forall x \in X \quad f(x) \geqslant 0$,

$f \leqslant g$ signifie : $\forall x \in X \quad f(x) \leqslant g(x)$.

COROLLAIRE II. — **Si f et g sont deux applications en escalier de $[a, b]$, $(a < b)$, dans $\mathbb{R}$ telles que $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.**

On applique le corollaire I à $g-f$. □

APPLICATION. — **Soit $f\colon [a, b] \to E$, $(a < b)$, une application en escalier. Alors :**

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant (b-a) \cdot \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|$$

On majore $\left\| \int_a^b f \right\|$ par $\int_a^b \|f\|$, et on utilise le corollaire II. □

PROPOSITION V. — **Soient $f\colon [a, b] \to E$ une application en escalier et c un point de $]a, b[$. Alors la restriction de f à $[a, c]$ (resp. $[c, b]$) est une application en escalier de $[a, c]$ dans E (resp. de $[c, b]$ dans E) qu'abusivement nous noterons encore f, et on a :**

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Le lecteur effectuera la démonstration en utilisant une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et contenant c. □

6.2. INTÉGRALE DE RIEMANN D'UNE APPLICATION D'UN INTERVALLE COMPACT DE ℝ DANS UN ESPACE DE BANACH.

Dans toute la suite du chapitre, E désigne un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$); en première lecture, on se limitera à $E = \mathbb{K}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

6.2.*1*. Notion d'application intégrable

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient $[a, b]$, avec $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach, et $f\colon [a, b] \to E$ une application. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :**

i) **Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe deux applications en escalier $\Phi_\varepsilon : [a, b] \to E$ et $\Psi_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$, vérifiant**

$$\|f-\Phi_\varepsilon\| \leqslant \Psi_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \Psi_\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

ii) **Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier $[a, b] \rightarrow E$, et une suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|f - \varphi_n\| \leqslant \psi_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n = 0.$$

Toute application $f : [a, b] \rightarrow E$ vérifiant ces deux assertions est dite *intégrable au sens de Riemann*, **et, abréviativement,** *intégrable.*

Tout couple de suites $[(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ vérifiant *ii)* **est dit** *couple associé* **à l'application intégrable f.**

i) $\Longrightarrow$ *ii)*. Si *i)* est vraie, à tout $n \in \mathbb{N}$ on peut associer :

$$\varphi_n = \Phi_{1/n+1} \qquad \text{et} \qquad \psi_n = \Psi_{1/(n+1)}.$$

On constate que les suites $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient *ii)*.

ii) $\Longrightarrow$ *i)*. Si *ii)* est vraie, à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on peut associer $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\int_a^b \psi_n \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N_\varepsilon$. On pose $\Phi_\varepsilon = \varphi_{N_\varepsilon}$ et $\Psi_\varepsilon = \psi_{N_\varepsilon}$ et on constate que Φ_ε et Ψ_ε vérifient *i)*. □

6.2.*2* Intégrale d'une application intégrable

1° Théorème et définition. — **Soient $[a, b]$, $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable. Alors pour tout couple de suites $[(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ associé à f (*cf.* 6.2.*1*) la suite $\left(\displaystyle\int_a^b \varphi_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E converge. Sa limite est indépendante du couple associé ; elle est dite intégrale de l'application f.**

— Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque ψ_n est une application positive et puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b \psi_n \leqslant \varepsilon/2$ dès que $n \geqslant N$.

Soient n et m deux entiers supérieurs à N. On a :

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| \leqslant \|\varphi_n - f\| + \|f - \varphi_m\| \leqslant \psi_n + \psi_m.$$

En utilisant les différentes propriétés de l'intégrale des applications en escalier, on obtient :

$$\left\| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi_m \right\| \leqslant \int_a^b \|\varphi_n - \varphi_m\| \leqslant \int_a^b (\psi_n + \psi_m) \leqslant \varepsilon$$

ce qui montre que la suite $\left(\displaystyle\int_a^b \varphi_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est de Cauchy, et donc convergente.

— Un autre couple de suites associé à f étant $[(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varpi_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\|\varphi_n-\theta_n\| \leqslant \|\varphi_n-f\| + \|f-\theta_n\| \leqslant \psi_n+\varpi_n.$$

Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b \|\varphi_n-\theta_n\| = 0$ et donc a fortiori

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \theta_n\right\| = 0.$$

Comme chacune des deux suites $\left(\displaystyle\int_a^b \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\displaystyle\int_a^b \theta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on en conclut $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b \varphi_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b \theta_n$. □

THÉORÈME. — **Toute application en escalier f : $[a, b] \to E$ est intégrable et son intégrale (au sens du théorème précédent) est $\displaystyle\int_a^b f$ (intégrale de f au sens du 6.1.*3*, 1°).**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_n = f$ et $\psi_n = 0$ (application nulle de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$). Le couple de suites $[(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ vérifie l'assertion *ii*) du 6.2.*1* ; d'où l'intégrabilité de f.

Au titre de limite de la suite $\left(\displaystyle\int_a^b \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'intégrale de f est précisément $\displaystyle\int_a^b f$. □

Ce théorème justifie :

NOTATION. — **L'intégrale de l'application intégrable f : $[a, b] \to E$ est notée $\displaystyle\int_a^b f$.**

2° ***Fonction intégrable sur un intervalle compact.*** — DÉFINITION. — **Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers un espace de Banach E, et $[a, b]$, $a < b$, un intervalle compact inclus dans l'ensemble de définition de f. Si la restriction de f à $[a, b]$ est une application intégrable, on dit que f est intégrable sur $[a, b]$, et que l'intégrale de la restriction, abusivement notée $\displaystyle\int_a^b f$, est l'intégrale de f sur $[a, b]$.**

On notera que la précision « sur $[a, b]$ » est ici indispensable. En revanche lorsqu'il s'agit d'une application $[a, b] \to E$, *intégrable* équivaut à *intégrable sur* $[a, b]$.

3° ***Propriétés des applications intégrables et des intégrales.*** — PROPOSITION I. — **Toute application intégrable est bornée.**

Soit f : $[a, b] \to E$ une application intégrable. Etant donné $1 \in \mathbb{R}_+^*$ il existe deux applications en escalier, φ_1 et ψ_1, de $[a, b]$ respectivement dans E et $\mathbb{R}$ telles que :

$$\|f-\varphi_1\| \leqslant \psi_1 \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi_1 \leqslant 1.$$

Il en résulte : $\|f\| \leqslant \|\varphi_1\| + \psi_1.$

Les applications en escalier φ_1 et ψ_1 sont bornées ; il en est donc de même de f. □

PROPOSITION II. — **Soient $[a, b]$, $a < b$, un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et E un espace de Banach. L'ensemble $\mathfrak{I}$ des applications intégrables de $[a, b]$ dans E est un sous-espace vectoriel de $E^{[a, b]}$; l'application $f \longmapsto \int_a^b f$ de $\mathfrak{I}$ dans E est linéaire.**

Contenant l'application nulle $[a, b] \to E$, $\mathfrak{I}$ n'est pas vide. Soient (α, β) un élément de $\mathbb{K}^2$, f et g deux éléments de $\mathfrak{I}$, $[(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ et $[(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varpi_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ des couples de suites respectivement associés à f et g. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|\alpha f+\beta g - \alpha\varphi_n - \beta\theta_n\| \leqslant |\alpha|\,\psi_n + |\beta|\,\varpi_n$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (|\alpha|\,\psi_n + |\beta|\,\varpi_n) = 0.$$

Ainsi $\alpha f+\beta g$ est intégrable et admet

$$[(\alpha\,\varphi_n+\beta\,\theta_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (|\alpha|\,\psi_n+|\beta|\,\varpi_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

pour couple de suites associé. On a :

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\alpha\,\varphi_n+\beta\,\theta_n)$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier et les théorèmes sur les limites, on en déduit :

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$ □

REMARQUES. — *a*) L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des applications en escalier $[a, b] \to E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{I}$.

b) Soient f et g deux applications de $[a, b]$ dans E qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ; $f-g$ est ainsi une application en escalier d'intégrale nulle (remarque *b*) du **6**.1.*3*, 1°). Il en résulte que si l'une des applications f ou g est intégrable, il en est de même de l'autre et les deux intégrales sont égales.

PROPOSITION III. — **Soient E et F deux espaces de Banach sur le même corps $\mathbb{K}$ et u une application linéaire continue de E dans F. Si $f : [a, b] \to E$ est intégrable il en est de même de $u \circ f : [a, b] \to F$ et l'on a :**

$$\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right). \tag{1}$$

— La proposition est acquise (proposition II du **6**.1.*3*, 2°) lorsque f est en escalier.

— Dans le cas général désignons par M la norme de $u \in \mathfrak{L}(E, F)$.

Soit $[(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ un couple de suites associé à l'application intégrable f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \circ \varphi_n : [a, b] \to F$ est en escalier (**6**.1.*3*, 2°), $M \psi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escalier (**6**.1.*3*, 2°).

On constate : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b M \psi_n = 0$ et, pour tout $t \in [a, b]$

$$\|u[(f - \varphi_n)(t)]\| \leqslant M \|(f - \varphi_n)(t)\| \leqslant M \psi_n(t)$$

ce qui entraîne : $\|u \circ f - u \circ \varphi_n\| \leqslant M \psi_n$.

Ainsi $u \circ f$ est intégrable et admet $[(u \circ \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (M \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ pour couple de suites associé. On a donc, en utilisant **6**.1.*3*, 2° :

$$\int_a^b u \circ f = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b u \circ \varphi_n = \lim_{n \to +\infty} u \left(\int_a^b \varphi_n \right).$$

En utilisant la continuité de u, on en déduit (1). □

Corollaire. — **Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace de Banach et $|||\cdot|||$ une norme sur E équivalente à $\|\cdot\|$, ce qui implique que $(E, |||\cdot|||)$ est un espace de Banach. Alors toute application $[a, b] \to E$ intégrable au sens de l'une des normes l'est au sens de l'autre, et les intégrales sont égales.**

En effet Id_E est une application linéaire et continue de l'un des espaces de Banach sur l'autre.

Proposition IV. — **Soit $E = \prod_{k=1}^{m} E_k$ un produit d'espaces de Banach ; on note p_k la projection canonique $E \to E_k$. A toute application $f : [a, b] \to E$ on associe les m applications $f_k = p_k \circ f$, $(k \in \mathbb{N}_m)$. Dans ces conditions, f est intégrable si, et seulement si chacune des f_k est intégrable, et alors :**

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b p_1 \circ f, \ldots, \int_a^b p_m \circ f \right). \tag{2}$$

— On sait (**3**.1.*1*, 5°) que E est un espace de Banach pour l'une quelconque des normes ν_1, ν_2, ν_∞.

— On a $f = \sum_{k=1}^{m} q_k \circ f_k$, en désignant par q_k l'injection canonique $E_k \to E$. Les p_k et les q_k étant linéaires et continues, d'une part l'intégrabilité de f entraîne celle de f_k, d'autre part l'intégrabilité des f_k entraîne celle des $q_k \circ f_k$ et, par application de la proposition II, celle de f.

— En cas d'intégrabilité, d'après la proposition II, l'intégrale de f est la somme de celles des $q_k \circ f_k$, et donc (d'après la proposition III) la somme des $q_k \left(\int_a^b f_k \right)$; d'où (2). □

Corollaire. — **Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ une base de E et $f = \sum_{k=1}^{m} f_k e_k$ une application de $[a, b]$ dans E ; un**

tel espace vectoriel est normé et toutes les normes sont équivalentes. Pour que f soit intégrable il faut et il suffit que pour tout $k \in \mathbb{N}_m$, $f_k : [a, b] \to \mathbb{K}$ soit intégrable. On a alors :

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{m} \left(\int_a^b f_k \right) e_k.$$

Résulte de ce que l'application $\sum_{k=1}^{m} x_k e_k \longmapsto (x_1, \ldots, x_m)$ est une isométrie de l'e.v.n. E sur l'e.v.n. $\mathbb{K}^m$ (au sens du **3**.1.*2*, 5°), dans la mesure où les normes sur E et $\mathbb{K}^m$ ont été convenablement choisies. □

CAS PARTICULIER. — **Pour que f : $[a, b] \to \mathbb{C}$ soit intégrable il faut et il suffit que sa partie réelle et sa partie imaginaire le soient. On a alors :**

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathcal{R}e(f) + i \int_a^b \mathcal{I}m(f).$$

PROPOSITION V. — **Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces de Banach, $\top : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue, f et g deux applications intégrables de $[a, b]$ respectivement dans E et F. Alors :**

$$f \top g : [a, b] \to G \qquad t \longmapsto f(t) \top g(t)$$

est intégrable sur $[a, b]$.

— *Posons $M = \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|$ et commençons par montrer qu'il existe un couple $[(\varphi_n^*)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_n^*)_{n \in \mathbb{N}}]$ de suites associé à f, vérifiant la condition :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall t \in [a, b] \qquad \|\varphi_n^*(t)\| \leqslant 2M. \tag{3}$$

Partons d'un couple associé arbitrairement choisi $[(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}]$. Puisque ψ_n est en escalier, $\{t \in [a, b] \mid \psi_n(t) > M\}$ est la réunion d'un nombre fini d'intervalles éventuellement réduits à des points. Posons :

$$\varphi_n^*(t) = \varphi_n(t) \quad \text{et} \quad \psi_n^*(t) = \psi_n(t) \quad \text{si } \psi_n(t) \leqslant M,$$
$$\varphi_n^*(t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi_n^*(t) = M \quad \text{si } \psi_n(t) > M.$$

Il est manifeste que φ_n^* et ψ_n^* sont des applications en escalier de $[a, b]$ dans E et $\mathbb{R}$ respectivement, et que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f - \varphi_n^*\| \leqslant \psi_n^*.$$

D'autre part, par construction $\psi_n^* \leqslant \psi_n$; d'où $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n^* = 0$.

On vérifie ensuite aisément que la condition (3) est remplie, en étudiant successivement les cas $\psi_n(t) \leqslant M$ et $\psi_n(t) > M$.

— Associons à f le couple de suites particulier, mis en évidence ci-dessus, et à g un couple quelconque $[(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varpi_n)_{n \in \mathbb{N}}]$. Désignant par N un majorant de $\|g(t)\|$ pour $t \in [a, b]$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f \top g - \varphi_n^* \top \theta_n\| \leqslant \|(f - \varphi_n^*) \top g\| + \|\varphi_n^* \top (g - \theta_n)\|.$$

On sait que la continuité de $\top$ implique l'existence de $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall\,(x, y) \in E \times F \qquad \|x \top y\| \leqslant k\,\|x\|\,\|y\|.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f \top g - \varphi_n^* \top \theta_n\| \leqslant k\,\|f - \varphi_n^*\|\,\|g\| + k\,\|\varphi_n^*\|\,\|g - \theta_n\|$$

et donc : $\quad \|f \top g - \varphi_n^* \top \theta_n\| \leqslant k\,(N\psi_n^* + 2M\varpi_n)$.

On en déduit que $[(\varphi_n^* \top \theta_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (kN\psi_n^* + 2kM\varpi_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ est un couple associé à $f \top g$, qui est ainsi intégrable. □

Cas particuliers. — a) *Le produit de deux applications intégrables de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est intégrable.*

b) *Le produit d'une application intégrable de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{K}$ *par une application intégrable de* $[a, b]$ *dans le* $\mathbb{K}$*-espace de Banach* E *est intégrable.*

Proposition VI. — **Soit** $f : [a, b] \to E$ **une application intégrable. Alors** $\|f\| : [a, b] \to \mathbb{R}$ **est intégrable ; on a :**

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\| \qquad (a < b). \tag{4}$$

Soit $[(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ un couple de suites associé à f. On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|f - \varphi_n\| \leqslant \psi_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n = 0.$$

Il en résulte que l'on a aussi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \big|\|f\| - \|\varphi_n\|\big| \leqslant \psi_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n = 0.$$

L'application $\|\varphi_n\|$ est en escalier sur $[a, b]$, ce qui montre que $[(\|\varphi_n\|)_{n\in\mathbb{N}},\ (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ est un couple de suites associé à $\|f\|$; d'où son intégrabilité. D'autre part d'après **6**.1.*3*, 2° proposition IV :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \left\| \int_a^b \varphi_n \right\| \leqslant \int_a^b \|\varphi_n\|.$$

L'inégalité (4) s'en déduit, en utilisant la continuité de la norme. □

En raisonnant comme au **6**.1.*3*, 2°, on établit :

Corollaire I. — **Si** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(a < b)$, **est une application intégrable positive, alors l'intégrale de** f **est positive.**

Corollaire II. — **Si** f **et** g **sont deux applications intégrables de** $[a, b]$, $(a < b)$, **dans** $\mathbb{R}$ **telles que** $f \leqslant g$, **alors** $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Application. — **Soit $f : [a, b] \to E$, $(a < b)$, une application intégrable. Alors :**

$$\left\| \int_a^b f(t) \right\| \leqslant (b-a) \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|.$$

Proposition VII. — **Soient $f : [a, b] \to E$ une application et c un point de $]a, b[$. Pour que f soit intégrable, il faut et il suffit que ses restrictions à $[a, c]$ et à $[c, b]$ le soient. Alors, en notant abusivement ces restrictions par f, on a :**

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

La condition est nécessaire. — Supposons f intégrable et soit $[(\varphi_n)_{n \in \mathrm{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathrm{N}}]$ un couple de suites associé à f. En appliquant à ψ_n la proposition V du **6**.1.*3*, 2°, on a :

$$\int_a^b \psi_n = \int_a^c \psi_n + \int_c^b \psi_n.$$

Compte tenu de la positivité de ψ_n, on en déduit :

$$\int_a^c \psi_n \leqslant \int_a^b \psi_n \quad \left(\text{resp. } \int_c^b \psi_n \leqslant \int_a^b \psi_n\right).$$

Ainsi : $$\lim_{n \to +\infty} \int_a^c \psi_n = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{n \to +\infty} \int_c^b \psi_n = 0\right).$$

D'autre part :

$$\forall\, t \in [a, c] \ (\text{resp. } \forall\, t \in [c, b]) \qquad \|f(t) - \varphi_n(t)\| \leqslant \psi_n(t).$$

Les restrictions des φ_n et des ψ_n déterminent des couples de suites respectivement associés aux restrictions de f, qui sont ainsi intégrables. □

La condition est suffisante. — Supposons que les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont intégrables et associons leur des couples de suites

$$[(\varphi_n)_{n \in \mathrm{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathrm{N}}] \quad \text{et} \quad [(\theta_n)_{n \in \mathrm{N}}, (\varpi_n)_{n \in \mathrm{N}}].$$

Les applications β_n et γ_n définies par :

$$\beta_n(t) = \varphi_n(t) \quad \text{et} \quad \gamma_n(t) = \psi_n(t) \quad \text{si } t \in [a, c];$$
$$\beta_n(t) = \theta_n(t) \quad \text{et} \quad \gamma_n(t) = \varpi_n(t) \quad \text{si } t \in]c, b]$$

sont des applications en escalier sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b \gamma_n = \int_a^c \gamma_n + \int_c^b \gamma_n = \int_a^c \psi_n + \int_c^b \varpi_n$$

car γ_n et ϖ_n ne diffèrent qu'au point c de $[c, b]$. Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|f-\beta_n\| \leqslant \gamma_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \gamma_n = 0.$$

On en déduit que f est intégrable sur $[a, b]$.

— L'égalité des intégrales s'obtient, à partir de la propriété correspondante de l'intégrale des applications en escalier par application des théorèmes sur les limites. □

4° ***Formule de Chasles.*** — Jusqu'ici il n'a été question que d'applications ou de fonctions définies sur un compact de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b]$, avec $a < b$. Adoptons maintenant :

CONVENTION. — a) *Si f est une fonction définie au point a, on dit que f est intégrable sur $[a, a]$ et on pose* $\int_a^a f = 0$.

b) *Si f est intégrable sur $[b, a]$, $b < a$, on convient de désigner par le symbole* $\int_a^b f$ *l'élément* $-\int_b^a f$ de E.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier :

PROPOSITION. — **Soient** a, b, c **trois réels, et** f **une fonction de** $\mathbb{R}$ **vers un espace de Banach** E, **intégrable sur** $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$. **Alors** f **est intégrable sur chacun des intervalles compacts déterminés par** a, b, c **et on a :**

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Plus généralement, si $a_0, \ldots, a_n$ **sont des réels tels que** f **soit intégrable sur** $[\min(a_k), \max(a_k)]$, **on a l'égalité :**

$$\int_{a_0}^{a_n} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f.$$

REMARQUE. — Les inégalités concernant $\int_a^b f$, et établies sous l'hypothèse $a < b$ (proposition VI et ses corollaires) ne s'appliquent pas si $a > b$. Le lecteur vérifiera cependant que si $I = [\inf(a, b), \sup(a, b)]$ et si $f : I \to E$ est intégrable, on a toujours :

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant |b-a| \sup_{t\in I} \|f(t)\|.$$

6.2.3. Sommes de Riemann

On revient ici à un intervalle compact $[a, b]$ avec $a < b$; E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace de Banach.

1° Définition. — **On appelle subdivision pointée de $[a, b]$ le couple constitué d'une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ et d'une famille $\xi = (\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points de $[a, b]$ vérifiant :**

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_n \qquad a_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant a_i.$$

Une telle subdivision pointée sera notée (σ, ξ) et on désigne par $\mathcal{S}'$ l'ensemble des subdivisions pointées de $[a, b]$, $\mathcal{S}$ continuant à désigner l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Le pas de (σ, ξ) est, par définition, celui de σ.

2° ***Bases de filtre sur*** $\mathcal{S}$ ***et*** $\mathcal{S}'$. — Proposition. — **B_η et B'_η désignant respectivement l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ et l'ensemble des subdivisions pointées de $[a, b]$ de pas au plus égal à η, les ensembles $\mathcal{B} = \{B_\eta | \eta \in \mathbb{R}_+^*\}$ et $\mathcal{B}' = \{B'_\eta | \eta \in \mathbb{R}_+^*\}$ sont des bases de filtre respectivement sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.**

Vérification sans difficulté à partir de la définition du **2.2.5**, 1°. □

Remarque. — Pour $\eta > 0$ donné le lecteur constatera que B_η contient les subdivisions de la forme $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ avec $a_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$, où n est un naturel suffisamment grand.

3° ***Sommes de Riemann.*** — Définition. — **Soient $f : [a, b] \to E$ une application, et (σ, ξ) un élément de $\mathcal{S}'$. On appelle somme de Riemann de f, pour la subdivision pointée considérée, l'élément $S(f, \sigma, \xi)$ de E défini par :**

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, f(\xi_i).$$

Pour f donnée, on dispose ainsi de l'application

$$F : \mathcal{S}' \to E \qquad (\sigma, \xi) \longmapsto S(f, \sigma, \xi).$$

4° Théorème. — **Soit $f : [a, b] \to E$ une application intégrable. Alors l'application F admet une limite suivant la base de filtre $\mathcal{B}'$, et cette limite est $\int_a^b f$.**

• Il s'agit de montrer qu'est vraie l'assertion :

$$\forall V \in \mathcal{V}\left(\int_a^b f\right) \quad \exists B'_\eta \in \mathcal{B}' \quad \forall (\sigma, \xi) \in \mathcal{S}' \quad ((\sigma, \xi) \in B'_\eta \Rightarrow S(f, \sigma, \xi) \in V)$$

qui s'écrit, en utilisant, dans l'e.v.n. E, la base de voisinages de $\int_a^b f$ constituée des boules fermées centrées en $\int_a^b f$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (\sigma, \xi) \in \mathcal{S}' \quad \left(\delta(\sigma) \leqslant \eta \implies \left\| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right\| \leqslant \varepsilon\right)$$

• Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque f est intégrable, on peut

— associer à f des applications en escalier $\varphi : [a, b] \to E$ et $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\|f - \varphi\| \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \psi \leqslant \varepsilon/4\,;$$

— associer à ces applications une subdivision $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ adaptée à l'une et à l'autre.

Soit $(\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n},\ \xi = (\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$ une subdivision pointée de $[a, b]$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ on a, en notant abusivement $f(\xi_i)$ l'application constante $t \longmapsto f(\xi_i)$ de $[a_{i-1}, a_i]$ dans E :

$$(a_i - a_{i-1})\, f(\xi_i) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\xi_i).$$

En utilisant la proposition VII du 6.2.2, 3° il vient :

$$\left\| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f - f(\xi_i)] \right\|.$$

• Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Deux cas sont possibles :

a) *Aucun des x_k n'appartient à* $[a_{i-1}, a_i]$. Les restrictions de φ et ψ à $[a_{i-1}, a_i]$ sont les constantes $t \longmapsto \varphi(\xi_i)$ et $t \longmapsto \psi(\xi_i)$, et, pour tout

$$t \in [a_{i-1}, a_i]$$

on a :

$$\|f(t) - f(\xi_i)\| \leqslant \|f(t) - \varphi(t)\| + \|\varphi(t) - f(\xi_i)\| \leqslant 2\psi(t).$$

D'où :

$$\left\| \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f - f(\xi_i)] \right\| \leqslant 2 \int_{a_{i-1}}^{a_i} \psi.$$

b) *L'un des x_k au moins appartient à* $[a_{i-1}, a_i]$. Désignant par M un majorant de $\|f(t)\|$ sur $[a, b]$, nous avons alors :

$$\left\| \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f - f(\xi_i)] \right\| \leqslant 2M\, \delta(\sigma).$$

Ecrivant $i \in I$ ou $i \in J$ suivant que l'on est dans le premier ou dans le second cas, on a : $\mathbb{N}_n = I \cup J$ et $I \cap J = \emptyset$. Compte tenu de ce qu'un point x_k appartient au plus à deux intervalles $[a_{i-1}, a_i]$, on obtient la majoration :

$$\left\|S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f\right\| \leqslant 2 \sum_{i \in I} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \psi + 4(p+1) M\delta(\sigma)$$

Comme ψ est positive, on a *a fortiori* :

$$\left\|S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 4(p+1) M\delta(\sigma)$$

En prenant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{8(p+1)M}$, la proposition est démontrée. □

COROLLAIRE. — **Soit $(\sigma_p, \xi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de subdivisions pointées de $[a, b]$ telle que $\lim\limits_{p \to +\infty} \delta(\sigma_p) = 0$. Si f est intégrable, la suite $(S(f, \sigma_p, \xi_p))_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E a pour limite $\int_a^b f$. En particulier les deux suites de termes généraux respectifs $\dfrac{b-a}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} f\left(a + i\,\dfrac{b-a}{p}\right)$ et $\dfrac{b-a}{p} \sum\limits_{i=0}^{p-1} f\left(a + i\,\dfrac{b-a}{p}\right)$ sont convergentes et admettent pour limite $\int_a^b f$.**

Il s'agit d'un cas particulier du théorème précédent. Les deux suites particulières correspondent aux subdivisions pointées obtenues en associant à la subdivision $\left(a + i\,\dfrac{b-a}{p}\right)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de pas $\dfrac{b-a}{p}$, dans le premier cas, les extrémités « droites » des intervalles de la subdivision, dans le second cas, les extrémités « gauches » des intervalles de la subdivision. □

Le résultat s'étend aux suites de termes généraux :

$$\frac{b-a}{p} \sum_{i=0}^{p} f\left(a + i\,\frac{b-a}{p}\right) \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{p+1} \sum_{i=0}^{p} f\left(a + i\,\frac{b-a}{p}\right).$$

5° ***Double application du corollaire.*** — Dans un sens il permet de démontrer que certaines suites sont convergentes et de calculer leurs limites, dans l'autre il ramène le calcul d'une intégrale à celui de la limite d'une suite.

EXEMPLES D'APPLICATION AUX SUITES

a) Soit p un entier, $p \geqslant 1$; étudier la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ avec $x_n = \sum\limits_{k=1}^{pn} \dfrac{1}{n+k}$

On a : $$x_n = \frac{1}{pn} \sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{1/p + k/(pn)}.$$

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $$t \longmapsto \frac{1}{1/p + t}.$$

Si nous prenons la subdivision pointée (σ_n, ξ_n) de $[0, 1]$ avec

$$\sigma_n = \left(\frac{k}{pn}\right)_{0 \leq k \leq pn} \quad \text{et} \quad \xi_n = \left(\frac{k}{pn}\right)_{1 \leq k \leq pn}$$

il est manifeste que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = S(f, \sigma_n, \xi_n)$. En anticipant sur **6.4.*1***, 2°, la continuité de f sur $[0, 1]$ implique son intégrabilité. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta(\sigma_n) = 0$ on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \int_0^1 f$.

Un calcul qui sera vu au chapitre 7 montre que cette limite est $\ln(1 + p)$. En particulier :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right) = \ln 2.$$

b) Etudier les deux suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ *avec*

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{n} \quad et \quad y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

On forme la suite complexe de terme général $x_n + iy_n$. On a $x_n + i\,y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et une démonstration semblable à celle de *a*) (ou un calcul direct) montre que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) = \frac{2i}{\pi}.$$

Il en résulte : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{2}{\pi}$.

EXEMPLE D'APPLICATION AUX INTÉGRALES. — Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$. L'application $t \longmapsto 1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ est continue, monotone, prend ses valeurs entre $(1-\alpha)^2$ et $(1+\alpha)^2$. D'où l'existence de l'intégrale

$$\mathfrak{J}_\alpha = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2)\, dt$$

(en anticipant ici sur **6.4**).

Le corollaire du 4° nous apprend que $\mathfrak{J}_\alpha$ est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, avec :

$$x_n = \frac{\pi}{n} \ln \left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2\alpha \cos \frac{k\pi}{n} + \alpha^2 \right) \right].$$

Or : $$1 - 2\alpha \cos \frac{k\pi}{n} + \alpha^2 = (\alpha - \omega^k)(\alpha - \omega^{-k})$$

avec : $\omega = \exp(i\pi/n)$.

En utilisant I. 5.1.*4*, on obtient l'égalité de polynômes

$$\prod_{k=-n}^{n-1} (X - \omega^k) = X^{2n} - 1.$$

On en déduit :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2\alpha \cos \frac{k\pi}{n} + \alpha^2 \right) = (\alpha^{2n} - 1) \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$$

et : $$x_n = \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} (1 - \alpha^{2n}) \right).$$

— Si $|\alpha| < 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\mathfrak{J}_\alpha = 0$.

— Si $|\alpha| > 1$, on écrit : $x_n = 2\pi \ln |\alpha| + \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}(\alpha^{-2n} - 1)\right)$

et on en déduit : $\mathfrak{J}_\alpha = 2\pi \ln |\alpha|$.

6.3. INTÉGRALE DE RIEMANN D'UNE APPLICATION A VALEURS DANS $\mathbb{R}$.

Dans le cas d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'existence d'une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ va nous permettre de donner de nouvelles définitions de l'intégrabilité et de l'intégrale. Nous vérifierons qu'elles sont équivalentes à celles que nous avons adoptées dans le cas général. Historiquement c'est sous cet aspect que l'intégration est apparue comme procédé de calcul des aires et volumes chez les Grecs, de rectification des courbes au XVII[e] siècle.

La théorie de l'intégrale des applications en escalier est supposée connue.

6.3.*1*. Intégrales inférieure et supérieure d'une application bornée

1° ***Notations.*** — Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée ; considérons dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des applications en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, les deux sous ensembles :

— $\mathcal{U}$ constitué des éléments de $\mathcal{E}$ qui minorent f,

— $\mathcal{V}$ constitué des éléments de $\mathcal{E}$, qui majorent f.

f étant bornée, $\mathcal{U}$ contient l'application constante :

$t \longmapsto \inf\limits_{u \in [a, b]} f(u)$. $\mathcal{V}$ contient l'application constante :

$t \longmapsto \sup\limits_{u \in [a, b]} f(u)$. A ces deux ensembles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ nous pouvons associer les deux sous-ensembles U et V de $\mathbb{R}$ constitués respectivement des intégrales des applications en escalier qui constituent $\mathcal{U}$ et des intégrales des applications en escalier qui constituent $\mathcal{V}$.

2° Théorème et définition. — **Avec les notations du 1°, U est un sous-ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$, sa borne supérieure est appelée intégrale inférieure de f et est notée $\displaystyle {}_*\int_a^b f$; V est un sous-ensemble non vide minoré de $\mathbb{R}$, sa borne inférieure est appelée intégrale supérieure de f et est notée $\displaystyle {}^*\int_a^b f$. On a :**

$$ {}_*\int_a^b f \leqslant {}^*\int_a^b f. \tag{1}$$

De $\mathcal{U} \neq \emptyset$ on déduit $U \neq \emptyset$ (resp. de $\mathcal{V} \neq \emptyset$ on déduit $V \neq \emptyset$). Soient u et v des éléments des ensembles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. On a $u \leqslant f \leqslant v$, donc $\int_a^b u \leqslant \int_a^b v$ (**6**.1.*3*, 2°).

$\mathcal{U}$ est ainsi majoré par $\int_a^b v$; d'où l'existence de $_*\int_a^b f$ et l'inégalité $_*\int_a^b f \leqslant \int_a^b v$. Celle-ci étant valable pour tout $v \in \mathcal{V}$, l'ensemble V est minoré par $_*\int_a^b f$; d'où l'existence de $^*\int_a^b f$ et l'inégalité (1). □

6.3.*2*. Sommes de Darboux d'une application bornée

1° DÉFINITION. — **Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée. A toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ on peut associer les sommes :**

$$d(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, m_i \qquad \text{et} \qquad D(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, M_i$$

où m_i et M_i désignent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a_{i-1} - a_i]$. Ces réels sont dits sommes de Darboux inférieure et supérieure de f, pour la subdivision σ.

2° LEMME. — **Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée. Pour tout couple (σ, σ') de subdivisions de $[a, b]$ on a $d(f, \sigma) \leqslant D(f, \sigma')$.**

• Considérons d'abord une subdivision $\sigma_1 = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ et c un point de $[a, b]$; soit σ_1' la subdivision dont l'image est obtenue en adjoignant à celle de σ_1 le point c. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $c \in [a_{i_0-1}, a_{i_0}]$; comparons $d(f, \sigma_1')$ et $d(f, \sigma_1)$.

— Si $c = a_{i_0-1}$ ou $c = a_{i_0}$, $d(f, \sigma_1') = d(f, \sigma_1)$

— Sinon, on a :

$$d(f, \sigma_1') - d(f, \sigma_1) = (c - a_{i_0-1})(\mu' - m_{i_0}) + (a_{i_0} - c)(\mu'' - m_{i_0}) \qquad (1)$$

μ' et μ'' désignant les bornes inférieures de f sur $[a_{i_0-1}, c]$ et sur $[c, a_{i_0}]$.

On constate $\mu' \geqslant m_{i_0}$ et $\mu'' \geqslant m_{i_0}$. On en déduit $d(f, \sigma_1') \geqslant d(f, \sigma_1)$.

On montre de la même façon : $D(f, \sigma_1') \leqslant D(f, \sigma_1)$.

• Si maintenant σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions de $[a, b]$ telles que $\sigma_1 \prec \sigma_2$, par récurrence sur le nombre fini de points de $[a, b]$ à adjoindre à l'image de σ_1 pour obtenir celle de σ_2, on montre :

$$d(f, \sigma_1) \leqslant d(f, \sigma_2) \text{ et } D(f, \sigma_2) \leqslant D(f, \sigma_1).$$

• Enfin si σ et σ' sont deux subdivisions quelconques de $[a, b]$, on peut écrire les inégalités :

$$d(f, \sigma) \leqslant d(f, \sigma \vee \sigma') \leqslant D(f, \sigma \vee \sigma') \leqslant D(f, \sigma')$$ □

REMARQUE. — Soient m et M les bornes de f sur $[a, b]$. Reprenons (1) et remarquons que :

$$0 \leqslant \mu' - m_{i_0} \leqslant M - m \text{ et } 0 \leqslant \mu'' - m_{i_0} \leqslant M - m.$$

Il en résulte :

$$0 \leqslant d(f, \sigma_1') - d(f, \sigma_1) \leqslant (M-m)\,\delta(\sigma_1). \tag{2}$$

Cette inégalité sera utilisée par la suite.

THÉORÈME. — **Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée. L'ensemble des sommes de Darboux inférieures de f est non vide majoré, sa borne supérieure est notée $d(f)$; l'ensemble des sommes de Darboux supérieures de f est non vide minoré, sa borne inférieure est notée $D(f)$. On a : $d(f) \leqslant D(f)$.**

Les deux ensembles envisagés sont évidemment non vides. Le lemme précédent permet de leur appliquer le raisonnement du **6.3.*1***, 2°. □

Reprenons l'ensemble $\mathcal{S}$ des subdivisions de $[a, b]$ et la base de filtre $\mathcal{B}$ introduite au **6.2.*3***, 2°. On dispose des deux applications de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$

$$\sigma \longmapsto d(f, \sigma) \quad \text{et} \quad \sigma \longmapsto D(f, \sigma).$$

PROPOSITION. — **Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée, alors :**

$$\lim_{\mathcal{B}} [\sigma \longmapsto d(f, \sigma)] = d(f) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\mathcal{B}} [\sigma \longmapsto D(f, \sigma)] = D(f).$$

Montrons la première égalité. On sait que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, on a $d(f, \sigma) \leqslant d(f)$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la définition de $d(f)$ on peut choisir une subdivision $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ telle que

$$d(f) - \varepsilon/2 \leqslant d(f, (x_k)).$$

Soit σ un élément de $\mathcal{S}$ et σ' obtenue en adjoignant à l'image de σ les $p+1$ points x_k. En utilisant l'inégalité (2) on obtient

$$0 \leqslant d(f, \sigma') - d(f, \sigma) \leqslant (p+1)\,(M-m)\delta(\sigma).$$

Comme σ' est plus fine que $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ on a en outre :

$$d(f) - \varepsilon/2 \leqslant d(f, (x_k)) \leqslant d(f, \sigma')$$

Ainsi :

$$d(f) - \varepsilon/2 - (p+1)\,(M-m)\delta(\sigma) \leqslant d(f, \sigma) \leqslant d(f).$$

Nous supposons $M \neq m$, sans quoi la proposition serait triviale.

Tout $\sigma \in \mathcal{S}$ dont le pas est inférieur à $\mu = \dfrac{\varepsilon}{2(p+1)(M-m)}$ vérifie donc

$$d(f) - \varepsilon \leqslant d(f, \sigma) \leqslant d(f). \qquad \square$$

3° THÉORÈME. — **Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée. Alors :**

$$d(f) = {}_*\int_a^b f \quad \text{et} \quad D(f) = {}^*\int_a^b f.$$

(Les notations sont celles du **6**.3.*1* et du **6**.3.*2*).

Montrons la première égalité, la seconde résultant du changement de f en $-f$.

— Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$; l'application

$$\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$$

définie par :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}_n \quad \forall t \in [a_{i-1}, a_i[\quad \omega(t) = m_i \\ \omega(b) = m_n \end{cases}$$

est un élément de $\mathcal{U}$.

Le réel $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) m_i$ est à la fois l'intégrale de l'application en escalier ω et la somme de Darboux $d(f, \sigma)$. Ainsi, pour toute subdivision σ, $d(f, \sigma)$ appartient à U et donc

$$d(f) \leqslant {}_*\int_a^b f.$$

— Pour justifier l'inégalité ${}_*\int_a^b f \leqslant d(f)$ il suffit de montrer :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad {}_*\int_a^b f \leqslant d(f) + \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. A $\varepsilon/2$ on peut associer $u \in \mathcal{U}$ telle que :

$${}_*\int_a^b f \leqslant \int_a^b u + \varepsilon/2.$$

Soit $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ une subdivision adaptée à u et $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision quelconque de $[a, b]$. De manière analogue à **6**.2.*3*, 4° on a :

$$\int_a^b u - d(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (u - m_i)$$

où m_i désigne abusivement l'application constante $t \longmapsto m_i$ de $[a_{i-1}, a_i]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Deux cas sont possibles :

a) Aucun des x_k n'appartient à $[a_{i-1}, a_i]$; sur ce segment u est une appli-

cation constante minorant f, et donc m_i, ce qui entraîne

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} (u - m_i) \leqslant 0.$$

b) Un point x_k au moins appartient à $[a_{i-1}, a_i]$ et on a :

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} (u - m_i) \leqslant (M - m)\, \delta(\sigma)$$

(m et M désignant toujours les bornes de f sur $[a, b]$).

Un raisonnement analogue à celui du **6.2.*3***, 4° permet d'obtenir :

$$\int_a^b u - d(f, \sigma) \leqslant (2p+2)\,(M-m)\, \delta(\sigma)$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ étant donné, il est possible de choisir σ telle que :

$$\delta(\sigma) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(2p+2)(M-m)}.$$

Ainsi :
$$\int_a^b u \leqslant d(f, \sigma) + \varepsilon/2.$$

Comme $d(f, \sigma) \leqslant d(f)$, on a donc $\displaystyle {}_*\!\int_a^b f \leqslant d(f) + \varepsilon.$ □

6.3.*3*. Intégrabilité des applications à valeurs dans ℝ

THÉORÈME. — **Soient** $[a, b]$, $a < b$, **un intervalle compact de** ℝ, **et** f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ **une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) f **est intégrable sur** $[a, b]$;

ii) **Les sommes de Riemann de** f **admettent une limite suivant la base de filtre** $\mathcal{B}'$, **(notation du 6.2.*3*, 2°)** ;

iii) f **est bornée et** $d(f) = D(f)$, **(notation du 6.3.*2*, 2°)** ;

iv) f **est bornée et** $\displaystyle {}_*\!\int_a^b f = {}^*\!\!\int_a^b f$, **(notation du 6.3.*1*, 2°).**

Lorsque ces assertions sont vraies, on a :

$$\int_a^b f = d(f) = D(f) = {}_*\!\int_a^b f = {}^*\!\!\int_a^b f.$$

i) $\Longrightarrow$ *ii*) A été démontré au **6.2.*3***, 4°, dans un contexte plus général.

ii) $\Longrightarrow$ *iii*) Par hypothèse les sommes de Riemann de f admettent une limite I, suivant $\mathcal{B}'$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que toute subdivision pointée (σ, ξ)

telle que $\delta(\sigma) \leqslant \eta$ vérifie : $|S(f, \sigma, \xi) - I| \leqslant \varepsilon/4$. Fixons une subdivision $\tau = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de pas inférieur à η.

— Fixons $i \in \mathbb{N}_n$ et considérons la famille $(\xi_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ où ξ_i est un élément quelconque t de $[a_{i-1}, a_i]$, et où $\xi_j = a_j$ pour $j \neq i$. Nous avons :

$$\left|(a_i - a_{i-1})f(t) + \sum_{j \neq i} (a_j - a_{j-1})f(a_j) - I\right| \leqslant \varepsilon/4$$

et donc : $\quad (a_i - a_{i-1})\,|f(t)| \leqslant \varepsilon/4 + |I| + |\sum_{j \neq i} (a_j - a_{j-1})f(a_j)|.$

On en déduit que f est bornée sur $[a_{i-1}, a_i]$, et donc sur $[a, b]$.

— Désignant encore par m_i la borne inférieure de f sur $[a_{i-1}, a_i]$, nous pouvons choisir $\theta_i \in [a_{i-1}, a_i]$ tel que

$$m_i \leqslant f(\theta_i) \leqslant m_i + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

Posons $\theta = (\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$; alors (τ, θ) vérifie d'une part

$$|S(f, \tau, \theta) - I| \leqslant \varepsilon/4 \quad \text{et donc} \quad S(f, \tau, \theta) \geqslant I - \varepsilon/4$$

d'autre part $\qquad S(f, \tau, \theta) \leqslant d(f, \tau) + \varepsilon/4$

On en déduit : $\qquad I - \varepsilon/2 \leqslant d(f).$

On montre de même : $\qquad D(f) \leqslant I + \varepsilon/2.$

Il en résulte : $D(f) \leqslant d(f) + \varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui exige $D(f) \leqslant d(f)$. Comme $d(f) \leqslant D(f)$, on a $d(f) = D(f)$. □

iii) ⟹ *iv)* Résulte de 6.3.*2*, 3°.

iv) ⟹ *i)* Par hypothèse U et V sont deux ensembles adjacents de réels. Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on peut trouver $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{V}$ tels que $\int_a^b v - \int_a^b u \leqslant \varepsilon$.

En considérant les deux applications en escalier u et $v - u$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$|f - u| \leqslant v - u \quad \text{et} \quad \int_a^b (v - u) \leqslant \varepsilon$$

ce qui montre l'intégrabilité de f sur $[a, b]$. De

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \qquad \int_a^b u \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b v$$

on déduit alors : $\int_a^b f = {}_*\!\int_a^b f = {}^*\!\int_a^b f.$ □

Remarques. — *a)* Il résulte de ce théorème et de la proposition du 6.3.*2*, 2° que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable on a

$$\lim_{\mathscr{B}} (D(f, \sigma) - d(f, \sigma)) = 0.$$

b) En utilisant le corollaire de la proposition IV de 6.2.*2*, 3° on voit que les assertions *i)*

et *ii*) du théorème précédent sont encore équivalentes pour des applications à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et en particulier pour les applications à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Dans le cas général, *ii*) $\Longrightarrow$ *i*) n'est pas vrai (cf. exercice 6.55).

c) Ce théorème met en évidence l'existence d'applications non intégrables : c'est le cas de la fonction caractéristique des rationnels sur $[0, 1]$ pour laquelle $d(f) = 0$ et $D(f) = 1$.

6.3.4. Intégrabilité d'une application monotone

THÉORÈME. — **Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(a < b)$, une application monotone. Alors f est intégrable.**

Pour fixer les idées, supposons f croissante. Si a_{i-1} et a_i sont deux points consécutifs d'une subdivision quelconque de $[a, b]$, les bornes de f sur $[a_{i-1}, a_i]$ sont $m_i = f(a_{i-1})$ et $M_i = f(a_i)$.

En désignant par $\sigma_n = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la subdivision définie par

$$a_i = a + i(b-a)/n,$$

on a donc
$$D(f, \sigma_n) - d(f, \sigma_n) = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)].$$

Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, pour n assez grand on a :

$$D(f, \sigma_n) - d(f, \sigma_n) \leqslant \varepsilon.$$

Les ensembles constitués respectivement des sommes de Darboux inférieures et des sommes de Darboux supérieures sont adjacents ; $d(f) = D(f)$. □

REMARQUE. — Une application à variation bornée, différence de deux applications croissantes, est intégrable.

6.3.5. Première formule de la moyenne

THÉORÈME. — **Soient f et g deux applications intégrables de l'intervalle compact $[a, b]$, $a < b$, dans $\mathbb{R}$, l'application g étant positive. On désigne par m [resp. M] la borne inférieure [resp. supérieure] de f sur $[a, b]$. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ vérifiant :**

$$m \leqslant k \leqslant M \quad \text{et} \quad \int_a^b fg = k \int_a^b g.$$

Si f est continue, alors il existe $c \in [a, b]$ vérifiant

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

L'intégrabilité de fg résulte de la proposition V du 6.2.2, 3°.

Les inégalités entre applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$:

$$mg \leqslant fg \leqslant Mg$$

entraînent les inégalités entre intégrales :

$$m \int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b g = 0$, on adopte $k = \dfrac{m+M}{2}$. Sinon $\dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ est un élément de $[m, M]$. □

CAS PARTICULIER. — **En adoptant $g : t \longmapsto 1$, on constate que si f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable il existe $k \in [m, M]$ tel que $\int_a^b f = k(b-a)$.**

Si f est continue (et donc intégrable d'après 6.4.*2*, 1°), il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f = (b - a)f(c)$.

DÉFINITION. — **Le réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$ est dit valeur moyenne de la fonction intégrable f sur $[a, b]$.**

Le vocable *valeur moyenne* se justifie par le fait qu'il s'agit de la limite commune des deux suites de termes généraux

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)$$

ainsi que cela résulte du corollaire du 6.2.*3*, 4°.

REMARQUES. — *a*) Le lecteur pourra démontrer que si f est continue et g strictement positive en tout point de $[a, b]$, il existe c de $]a, b[$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

b) On constate que le théorème précédent, démontré pour $a < b$, reste valable avec les conventions faites en 6.2.*2*, 2° dans les cas $a = b$ et $a > b$. Il reste encore vrai lorsque l'application g est négative.

6.3.*6*. Deuxième formule de la moyenne

Il sera commode pour le lecteur de retrouver côte à côte les deux formules de la moyenne, mais *la démonstration qui suit est tributaire du* 6.6.*1*.

THÉORÈME. — **Soient f une application positive,décroissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, g une application intégrable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors il existe un point c de $[a, b]$ tel que l'on ait :**

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g.$$

L'intégrabilité de f se justifie par 6.3.*4*, celle de fg par 6.2.*2*.

• *Démonstration pour f de classe C^1 et g continue.*

On dispose de $G : t \longmapsto \int_a^t g$, de classe C^1 sur $[a, b]$ (6.6.*1*). Par une intégration par parties :

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) + \int_a^b G.(-f')$$

Comme $-f'$ est positive, la première formule de la moyenne fournit l'existence de $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b G(-f') = G(\xi) \int_a^b (-f') = (f(a) - f(b)G(\xi).$$

D'où, en abandonnant le cas trivial où l'application f est nulle, et donc en supposant $f(a) > 0$:

$$\frac{1}{f(a)} \cdot \int_a^b fg = \rho G(b) + (1 - \rho)G(\xi), \qquad \rho = \frac{f(b)}{f(a)} \tag{1}$$

Comme $\rho \in [0, 1]$, et comme $G([a, b])$ est un intervalle et donc un convexe, le second membre de (1) est un élément de $G([a, b])$. □

- *Démonstration dans le cas général.*

Nous aurons à utiliser $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$, bases de filtre respectivement sur $\mathcal{S}$ ensemble des subdivisions de $[a, b]$ et sur $\mathcal{S}'$ ensemble des subdivisions pointées de $[a, b]$ (**6.2.3**, 2°).

L'application $G : t \longmapsto \int_a^t g$ est continue sur $[a, b]$ (**6.6.1**), et donc bornée. Désignons par m et M respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de G sur $[a, b]$. Si nous établissons la double inégalité $mf(a) \leqslant \int_a^b fg \leqslant Mf(a)$, le théorème résultera du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à l'application continue G.

Soit $(\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}, \xi = (\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$ un élément de $\mathcal{S}'$. L'application intégrable g est bornée sur $[a, b]$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, sa restriction à $[a_{i-1}, a_i]$ admet donc une borne inférieure μ_i et une borne supérieure ν_i. Soit $(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels vérifiant :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_n \qquad \mu_i \leqslant k_i \leqslant \nu_i.$$

Puisque f est positive et décroissante, on peut écrire :

$$\left| S(fg, \sigma, \xi) - \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) k_i \right| \leqslant f(a) \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})(\nu_i - \mu_i).$$

L'application $fg : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au titre de produit d'applications intégrables. On a donc :

$$\lim_{\mathfrak{B}'} S(fg, \sigma, \xi) = \int_a^b fg \qquad (\mathbf{6.2.3}, 4°)$$

L'application g étant intégrable on a :

$$\lim_{\mathfrak{B}} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})(\nu_i - \mu_i) = 0 \quad (\mathbf{6.3.3}, \text{ Remarque}).$$

Il en résulte : $\lim_{\mathfrak{B}'} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) k_i = \int_a^b fg.$

Choisissons alors, pour tout i de $\mathbb{N}_n$, le réel k_i défini par :

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} g = k_i(a_i - a_{i-1}) \qquad (\mathbf{6.3.5}). \text{ Alors :}$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) k_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,[G(a_i) - G(a_{i-1})]$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} G(a_i)\,[f(\xi_i) - f(\xi_{i+1})] + G(b) \cdot f(\xi_n)$$

Puisque f est positive et décroissante, il en résulte :

$$mf(\xi_1) \leqslant \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) k_i \leqslant Mf(\xi_1).$$

Dans chaque famille ξ, on peut adopter $\xi_1 = a$. Compte tenu de :

$$\int_a^b fg = \lim_{\mathscr{P}} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) k_i$$

on a :

$$mf(a) \leqslant \int_a^b fg \leqslant Mf(a) \qquad \square$$

REMARQUE. — *Sous les mêmes hypothèses, il existe $c' \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b fg = f(a+) \int_a^{c'} g$$

où $f(a+)$ désigne la limite à droite de f en a.

Il suffit d'appliquer ce qui précède à $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(a) = f(a+); \quad \tilde{f}(t) = f(t) \text{ pour } t \in]a, b].$$

Naturellement c' n'est pas forcément égal à c.

6.3.7. Autres propriétés de l'intégrale d'une application à valeurs dans ℝ

Ces propriétés complètent celles qui ont été vues au **6.2.2**, 3°.

PROPOSITION I. — **Soient f et g deux applications intégrables de $[a, b]$ dans ℝ. Alors les deux applications :**

$$\inf(f, g) : t \longmapsto \inf[f(t), g(t)]; \qquad \sup(f, g) : t \longmapsto \sup[f(t), g(t)]$$

sont intégrables sur $[a, b]$ et l'on a :

$$\int_a^b \inf(f, g) \leqslant \inf\left(\int_a^b f, \int_a^b g\right); \qquad \sup\left(\int_a^b f, \int_a^b g\right) \leqslant \int_a^b \sup(f, g)$$

En effet $f-g$ et $|f-g|$ sont intégrables (propositions II et VI du **6.2.2**, 3°). Or on a :

$$\inf(f, g) = 1/2\,[f+g-|f-g|]$$
$$\sup(f, g) = 1/2\,[f+g+|f-g|]$$

D'où l'intégrabilité de $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$. On constate :

$$\int_a^b \inf(f, g) \leqslant \int_a^b f \quad \text{et} \quad \int_a^b \inf(f, g) \leqslant \int_a^b g$$

D'où la première inégalité. La seconde s'établit de la même façon. □

REMARQUE. — L'intégrabilité de f entraîne donc celles de

$$f^+ = \sup(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = \sup(-f, 0).$$

PROPOSITION II. — **Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application intégrable, positive, et telle que $\int_a^b f = 0$. Alors f prend la valeur 0 en tout point de $[a, b]$ où elle est continue.**

Soit t_0 un point de $[a, b]$ en lequel f est continue. Si $f(t_0) > 0$, la continuité de f en t_0 permet de trouver un intervalle I de longueur $l(I)$ non nulle, contenant t_0 et contenu dans $[a, b]$ tel que :

$$\forall\, t \in I \qquad f(t) \geqslant f(t_0)/2$$

L'application en escalier $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t) = f(t_0)/2 \quad \text{si} \quad t \in I; \quad u(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \notin I.$$

minore f et est intégrable ; d'où : $\int_a^b u \leqslant \int_a^b f$ et donc

$$0 < \frac{1}{2} f(t_0) \cdot l(I) \leqslant \int_a^b f$$

ce qui constitue une contradiction. On a donc $f(t_0) = 0$ □

COROLLAIRE. — **Soient f et g deux applications intégrables et continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, telles que $f \leqslant g$. Alors $\int_a^b f = \int_a^b g$ équivaut à $f = g$.**

On applique la proposition à $h = g - f$. □

6.3.8. Inégalités de Schwarz et de Minkowski

1° *Inégalité de Schwarz.* — THÉORÈME. — **Soient f et g deux applications intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Alors :**

$$\left| \int_a^b \bar{f} \cdot g \right|^2 \leqslant \int_a^b |f|^2 \cdot \int_a^b |g|^2. \tag{1}$$

Dans le cas où f et g sont continues, (1) est une égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Remarquons tout d'abord que f et g étant intégrables, $\bar{f}$ l'est ainsi que $\bar{f} \cdot g$, $|f|^2$ et $|g|^2$. Considérons alors $\mathfrak{J}$, $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. L'application de $\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}$ dans $\mathbb{C}$ qui à (f, g) fait correspondre $\int_a^b \bar{f} \cdot g$ est une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne telle que la forme hermitienne associée $f \longmapsto \int_a^b |f|^2$ soit positive. De plus cette forme hermitienne associée est définie dans le cas où on se restreint au sous-espace des applications continues et intégrables de $[a, b] \to \mathbb{C}$. Le théorème résulte alors de l'étude des formes hermitiennes positives et des formes hermitiennes définies positives (II.3.3.2, 2°). □

REMARQUE. — Si f et g sont deux applications intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ on obtient :

$$\left(\int_a^b |f \cdot g| \right)^2 \leqslant \int_a^b |f|^2 \cdot \int_a^b |g|^2$$

en appliquant l'inégalité de Schwarz à $|f|$ et $|g|$.

2° ***Inégalité de Minkowski.*** — THÉORÈME. — **Soient f et g deux applications intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Alors :**

$$\left[\int_a^b |f+g|^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\int_a^b |f|^2\right]^{1/2} + \left[\int_a^b |g|^2\right]^{1/2}. \tag{2}$$

Dans le cas où f et g sont continues sur $[a, b]$, (2) est une égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles, avec un coefficient de proportionnalité réel positif.

Résulte aussi de II.3.3.*2*, 2°. □
Une extension de (2) fait l'objet de l'exercice 6.27.

3° ***Application.*** — PROPOSITION. — **Soit $\mathfrak{J}$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des applications intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$; alors l'application de $\mathfrak{J}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à f de $\mathfrak{J}$ fait correspondre**

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f|^2\right]^{1/2}$$

est une semi-norme; sa restriction au sous-espace des applications continues est une norme.

Démonstration facile. □

REMARQUE. — Sur $\mathfrak{J}$ nous disposons aussi de la semi-norme $f \longmapsto \|f\|_1 = \int_a^b |f|$ et de la norme $f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$; en prenant pour g l'application constante de valeur 1 on voit que $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$. On a en outre $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$.

6.4. CLASSES D'APPLICATIONS INTÉGRABLES

Nous savons déjà qu'une application monotone $[a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Dans ce sous-chapitre nous allons donner quelques conditions suffisantes, simples d'emploi, pour qu'une application à valeurs dans un espace de Banach soit intégrable.

6.4.*1*. Intégrabilité d'une application continue

1° ***Applications réglées.*** — Les applications réglées d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach ont été définies au 4.6.*2*, 2°.

L'étude générale des applications réglées sera faite au IV,2.2.*2*. Bornons nous ici à rappeler que nous avons montré (4.6.*2*, 2°) :

THÉORÈME. — **Toute application continue par morceaux (et, en particulier, continue) $f : [a, b] \longrightarrow E$ d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach est réglée.**

2° THÉORÈME. — **Toute application réglée d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach est intégrable.**

Soit $f: [a, b] \to E$, $(a < b)$, une telle application. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une application en escalier $\varphi : [a, b] \to E$ telle que

$$\sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - \varphi(t)\| \leqslant \varepsilon/(b-a).$$

Soit ψ l'application $t \longmapsto \varepsilon/(b-a)$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\|f - \varphi\| \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \psi \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

CAS PARTICULIER. — **Toute application continue par morceaux (et, en particulier, continue) d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach est intégrable.**

3° ***Approximations d'une application intégrable.*** — THÉORÈME. — **Soit $f: [a, b] \to E$, $(a < b)$, une application intégrable d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach. Alors :**

a) **Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\varphi : [a, b] \to E$, en escalier, telle que :**

$$\int_a^b \|f - \varphi\| \leqslant \varepsilon.$$

b) **Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $g : [a, b] \to E$, continue, telle que :**

$$\int_a^b \|f - g\| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration de a). — D'après la définition de l'intégrabilité, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe deux applications en escalier φ et ψ de $[a, b]$ dans E et $\mathbb{R}$ telles que :

$$\|f - \varphi\| \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \psi \leqslant \varepsilon$$

f et φ étant intégrables, il en est de même pour $f-\varphi$ et pour $\|f-\varphi\|$. On a (6.2.2, 3°) :

$$\int_a^b \|f - \varphi\| \leqslant \int_a^b \psi \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Démonstration de b). — Compte tenu de *a*), il suffit de traiter le cas où f est en escalier. Soient $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f, et λ_i la valeur de f sur $]a_{i-1}, a_i[$. Etant donné un réel $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\eta < \inf \frac{a_i - a_{i-1}}{2}$, considérons l'application $g : [a, b] \to E$ définie par :

$$\begin{cases} \forall t \in [a, a+\eta] & g(t) = f(a) + \dfrac{t-a}{\eta}(\lambda_1 - f(a)) \\ \forall i \in \mathbb{N}_{n-1} \quad \forall t \in [a_i - \eta, a_i + \eta] & g(t) = \lambda_i + \dfrac{t-a_i+\eta}{2\eta}(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \\ \forall t \in [b-\eta, b] & g(t) = \lambda_n + \dfrac{t-b+\eta}{\eta}(f(b) - \lambda_n) \\ \text{dans tous les autres cas : } g(t) = f(t). \end{cases}$$

Le lecteur vérifiera sans difficulté que g est continue et que l'on a

$$\int_a^b \|f-g\| \leqslant 4Mn\eta,$$

où M est un majorant de $\|f(t)\|$ pour $t \in [a, b]$. Il en résulte qu'il est possible de choisir $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\int_a^b \|f-g\| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Interprétation du théorème. — Dans l'espace vectoriel des applications intégrables de $[a, b]$ dans E, muni de la semi norme $f \longmapsto \|f\|_1 = \int_a^b \|f\|$, les deux sous-espaces vectoriels respectivement constitués des applications en escalier et des applications continues, sont denses. D'où la possibilité de ramener le cas général à celui de l'intégrale des applications en escalier ou de l'intégrale des applications continues.

EXEMPLE. — *Soit f: $[a, b] \to \mathbb{C}$ une application intégrable. A tout $n \in \mathbb{N}$ on associe l'application*

$$g_n : [a, b] \to \mathbb{C} \qquad t \longmapsto e^{int}$$

Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f g_n = 0.$$

— La proposition est vraie lorsque f est l'application constante $t \longmapsto 1$. En effet, en anticipant sur **6.7.*1***, on a alors :

$$\int_a^b g_n = \frac{1}{in}(e^{inb} - e^{ina}) \quad \text{et donc} \quad \left|\int_a^b g_n\right| \leqslant \frac{2}{n}.$$

— Elle est donc vraie lorsque f est une application en escalier.

— Dans le cas général, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Associons lui $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, en escalier, telle que $\int_a^b |f - \varphi| \leqslant \varepsilon/2$. On a donc $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi g_n = 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N \quad \left|\int_a^b \varphi g_n\right| \leqslant \varepsilon/2.$

Pour tout $n \geqslant N$ on a donc :

$$\left|\int_a^b f g_n\right| \leqslant \left|\int_a^b f g_n - \int_a^b \varphi g_n\right| + \left|\int_a^b \varphi g_n\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |f-\varphi| + \left|\int_a^b \varphi g_n\right| \leqslant \varepsilon.$$

(On a utilisé : $\forall t \in [a, b] \quad |g_n(t)| = 1$). □

6.4.2 Une condition suffisante d'intégrabilité

1° *Fonction localement intégrable sur un intervalle.* — DÉFINITION. — **Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers un espace de Banach E, et I un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f. On dit que f est localement intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur tout intervalle compact inclus dans I.**

Notons que si I est compact, il ne s'agit pas d'autre chose que d'une fonction intégrable sur I. Par ailleurs une fonction continue sur I (resp. monotone sur$I$) est localement intégrable sur I.

2° THÉORÈME. — **Si l'application f: $[a, b] \to E$, $(a < b)$, est bornée et localement intégrable sur $]a, b[$, alors f est intégrable (sur $[a, b]$).**

Désignons par M un majorant de $\|f(t)\|$ sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; associons lui $\eta = \inf[(b-a)/2, \varepsilon/(4M)]$.

La restriction de f à $[a+\eta, b-\eta]$ est intégrable, et on dispose des deux applications en escalier :

$$\varphi : [a+\eta, b-\eta] \to E \qquad \psi : [a+\eta, b-\eta] \to \mathbb{R}$$

telles que : $\quad \|f-\varphi\| \leqslant \psi \quad$ et $\quad \displaystyle\int_{a+\eta}^{b-\eta} \psi \leqslant \varepsilon/2.$

Considérons les deux applications en escalier $\bar{\varphi}: [a, b] \to E$ et $\bar{\psi}: [a, b] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} \forall t \in [a, a+\eta[& : \bar{\varphi}(t) = 0 \qquad \bar{\psi}(t) = M \\ \forall t \in [a+\eta, b-\eta] & : \bar{\varphi}(t) = \varphi(t) \quad \bar{\psi}(t) = \psi(t) \\ \forall t \in]b-\eta, b] & : \bar{\varphi}(t) = 0 \qquad \bar{\psi}(t) = M \end{cases}$$

On a manifestement $\|f-\bar{\varphi}\| \leqslant \bar{\psi}$, ainsi que l'inégalité :

$$\int_a^b \bar{\psi} = \int_a^{a+\eta} \bar{\psi} + \int_{a+\eta}^{b-\eta} \psi + \int_{b-\eta}^b \bar{\psi} \leqslant \varepsilon. \qquad □$$

COROLLAIRE. — **Soit f: $[a, b] \to E$ une application bornée n'ayant qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points de discontinuité. Alors f est intégrable.**

Soit $(c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la subdivision de $[a, b]$ dont l'image est formée de a, de b et des points de discontinuité de f. D'après le théorème, la restriction de f à tout $[c_{i-1}, c_i]$ est intégrable. On applique alors la proposition VII du 6.2.2, 3°.

□

EXEMPLE. — Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(t) = \sin 1/t$ si $t \neq 0$; $f(0) = 0$. Cette application est bornée et localement intégrable, et donc intégrable. Nous verrons au IV.2.2.2 qu'elle n'est pas réglée; *il existe donc des applications intégrables, non réglées.*

6.5. CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE D'INTÉGRABILITÉ D'UNE APPLICATION BORNÉE

Ce sous-chapitre peut être laissé de côté en première lecture.

6.5.1. Oscillation d'une application

1° DÉFINITION. — **Soient E un espace topologique, (F, d) un espace métrique et $f : E \rightarrow F$ une application. Pour tout $x \in E$, on appelle oscillation de f en x et on note $\omega(f, x)$, l'élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$:**

$$\omega(f, x) = \inf_{U \in \mathcal{V}(x)} \delta(f(U)).$$

Rappelons que $\mathcal{V}(x)$ désigne l'ensemble des voisinages de x, et $\delta(A)$ le diamètre d'une partie A de F.

2° THÉORÈME I. — **f est continue en x si et seulement si $\omega(f, x) = 0$.**

— Si f est continue en x :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists U \in \mathcal{V}(x) \qquad f(U) \subset B_c(f(x), \varepsilon/2).$$

Il en résulte $\delta[f(U)] \leqslant \varepsilon$ et donc $\omega(f, x) = 0$.

— Si $\omega(f, x) = 0$, alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists U \in \mathcal{V}(x) \qquad \delta(f(U)) \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit : $\forall y \in U \quad d[f(x), f(y)] \leqslant \varepsilon$ □

THÉORÈME II. — **Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $A = \{x \in E \mid \omega(f, x) \geqslant \varepsilon\}$ est un fermé.**

Soit $x \in \overline{A}$. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe un ouvert U tel que $\{x\} \subset U \subset V$. De $x \in \overline{A}$ on déduit $A \cap U \neq \emptyset$. Soit $y \in A \cap U$; on a : $\omega(f, y) \geqslant \varepsilon$ et $V \in \mathcal{V}(y)$, et donc $\delta[f(V)] \geqslant \varepsilon$.

Ainsi : $\forall V \in \mathcal{V}(x) \quad \delta[f(V)] \geqslant \varepsilon$. Il en résulte $x \in A$. □

6.5.2. Parties négligeables de $\mathbb{R}$

1° DÉFINITION. — **Une partie E de $\mathbb{R}$ est dite négligeable si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles compacts, vérifiant**

$$i) \quad E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

$$ii) \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} l(I_k) \leqslant \varepsilon$$

où $l(I_k)$ désigne la longueur de I_k (qui est aussi son diamètre).

REMARQUE. — On obtient une définition équivalente en remplaçant les intervalles compacts par des intervalles ouverts $]a_n, b_n[$. Il suffit de remarquer que $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ étant donné on a :

$$[a_n, b_n] \subset \left]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right[.$$

2° THÉORÈME. — **Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties négligeables de $\mathbb{R}$ alors $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est négligeable.**

Recouvrons E_n par une suite $(I_p^n)_{p \in \mathbb{N}}$ d'intervalles compacts tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} l(I_k^n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

La famille $(I_p^n)_{(p, n) \in \mathbb{N}^2}$ est dénombrable ; notons-la $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Alors, manifestement $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$.

D'autre part, pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$: $\sum_{n \in A} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leqslant \varepsilon$.

Il en résulte : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} l(J_k) \leqslant \varepsilon$. □

COROLLAIRE. — **Toute partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeable.**

En effet $\{t\}$ est manifestement négligeable. □

REMARQUE. — Dans $\mathbb{R}$ il existe des parties négligeables non dénombrables, l'ensemble de Cantor par exemple.

6.5.3. Caractérisation des applications intégrables (théorème de Lebesgue)

1° LEMME. — **Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, E un espace de Banach et $f : [a, b] \to E$ une application intégrable. Alors :**

$$\forall \alpha > 0 \qquad A = \{t \in [a, b] \mid \omega(f, t) \geqslant \alpha\} \textbf{ est négligeable.}$$

Donnons-nous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; f étant intégrable, il existe deux applications en escalier φ et ψ de $[a, b]$ respectivement dans E et $\mathbb{R}$ telles que :

$$\|f - \varphi\| \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \psi \leqslant \frac{\alpha\varepsilon}{6}.$$

Choisissons une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ adaptée à la fois à φ et ψ. Pour un élément $i \in \mathbb{N}_n$ deux cas sont possibles :

a) La valeur constante prise par ψ sur $]a_{i-1}, a_i[$ n'excède pas $\alpha/3$. Alors, pour tout

$$(x, y) \in (]a_{i-1}, a_i[)^2,$$

on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \psi(x) + \psi(y) \leqslant 2\alpha/3.$$

D'où, pour tout $t \in]a_{i-1}, a_i[$:

$$\omega(f, t) \leqslant 2\alpha/3 \qquad \text{et donc} \qquad t \notin A.$$

b) La valeur prise par ψ sur $]a_{i-1}, a_i[$ est strictement supérieure à $\alpha/3$. Soit J l'ensemble des indices i correspondant au cas *b*). On a :

$$\frac{\alpha}{3} \sum_{i \in J} (a_i - a_{i-1}) \leqslant \int_a^b \psi \leqslant \frac{\alpha\varepsilon}{6}.$$

On retient : $$\sum_{i \in J} (a_i - a_{i-1}) \leqslant \varepsilon/2.$$

Désignant par A' l'image de la subdivision σ, on a :

$$A \subset (A' \cup (\bigcup_{i \in J} [a_{i-1}, a_i])).$$

L'ensemble A', qui est fini, peut être recouvert par des intervalles compacts dont la somme des longueurs n'excède pas $\varepsilon/2$. □

2° THÉORÈME. — **Soit f une application intégrable d'un intervalle compact $[a, b]$, $a < b$, de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E. Alors f est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable.**

— Nous avons déjà vu que f est bornée.

— L'ensemble des points de discontinuité de f — caractérisés par $\omega(f, t) > 0$ — s'écrit :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ t \in [a, b] \mid \omega(f, t) \geqslant \frac{1}{n+1} \right\}.$$

C'est une réunion dénombrable de parties négligeables de $\mathbb{R}$. On utilise 6.5.2, 2°. □

3° THÉORÈME RÉCIPROQUE. — **Soit f: $[a, b] \to E$ une application bornée, dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable. Alors f est intégrable.**

M désigne un majorant de $\|f(t)\|$ sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $$A = \left\{ t \in [a, b] \mid \omega(f, t) \geqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right\}.$$

Pour $t \in A$, f n'est pas continue en t ; A est donc négligeable. D'après 6.5.1, 2°, A est fermé.

Il existe un recouvrement $\mathcal{R}$ de A par une suite d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs n'excède pas $\varepsilon/2M$; A étant compact, $\mathcal{R}$ admet un sous-recouvrement fini $\mathcal{R}_1$. Désignons par K le compact complémentaire dans $[a, b]$ de la réunion des intervalles de $\mathcal{R}_1$. Pour tout $t \in K$, on a $\omega(f, t) < \varepsilon/2(b-a)$, et il existe un intervalle ouvert $I_t \ni t$ tel que

$$\forall (x, y) \in I_t^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon/2(b-a).$$

Du recouvrement ouvert $(I_t)_{t \in K}$ de K, extrayons un sous-recouvrement fini $\mathcal{R}_2$; ordonnons les extrémités des intervalles de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ de façon à obtenir une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $]a_{i-1}, a_i[$ est inclus dans au moins un intervalle de $\mathcal{R}_1$ ou de $\mathcal{R}_2$. Ecrivons $i \in I_1$ lorsque $]a_{i-1}, a_i[$ est inclus dans un intervalle de $\mathcal{R}_1$ et posons $I_2 = \mathbb{N}_n \setminus I_1$, (pour $i \in I_2$, $]a_{i-1}, a_i[$ est donc inclus dans un intervalle de $\mathcal{R}_2$). Définissons φ et ψ, applications en escalier sur $[a, b]$ par :

$$\begin{array}{lll} \forall\, i \in \mathbb{N}_n \cup \{0\} & \varphi(a_i) = 0 & \psi(a_i) = M \\ \forall\, i \in I_1 \quad \forall\, t \in]a_{i-1}, a_i[& \varphi(t) = 0 & \psi(t) = M \\ \forall\, i \in I_2 \quad \forall\, t \in]a_{i-1}, a_i[& \varphi(t) = f\left(\dfrac{a_i + a_{i-1}}{2}\right) & \psi(t) = \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}. \end{array}$$

On constate : $\|f - \varphi\| \leqslant \psi$ et $\displaystyle\int_a^b \psi \leqslant \varepsilon.$ □

4° *Applications.* — THÉORÈME I. — **Soient f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ une application intégrable, et g une application continue d'un compact $K \supset f([a, b])$ dans un espace de Banach E. Alors $g \circ f$: $[a, b] \to E$ est intégrable.**

Etant continue g est bornée ; $g \circ f$ est donc bornée. De plus $g \circ f$ est continue en tout point où f est continue ; l'ensemble des points de discontinuité de $g \circ f$ est donc négligeable. □

COROLLAIRE. — **Soit f : $[a, b] \to \mathbb{C}$ une application intégrable. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \leqslant |f(t)|$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors $1/f$ est intégrable.**

En effet f est bornée. Soit β un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$. On prend $K = [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$ et on applique le théorème I avec $g : t \longmapsto 1/t$. □

Théorème II. — **Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application positive, intégrable. Alors $\int_a^b f = 0$ si, et seulement si $A = \{t \in [a, b] \mid f(t) \neq 0\}$ est négligeable.**

— Si l'intégrale est nulle, f prend la valeur 0 en tout point où elle est continue ; A est inclus dans l'ensemble négligeable des points de discontinuité de f.

— Supposons A négligeable. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, en escalier, vérifiant :

$$u \leqslant f \quad \text{et} \quad \int_a^b (f-u) \leqslant \varepsilon.$$

Etant donné que $u(t) > 0$ exige $f(t) > 0$, $A' = \{t \in [a, b] \mid u(t) > 0\}$ est négligeable ; or A' est une réunion *finie* d'intervalles ; A' est donc un ensemble fini. D'où :

$$\int_a^b u \leqslant 0, \int_a^b f \leqslant \varepsilon \text{ et } \int_a^b f = 0. \qquad \square$$

Remarque. — Une application peut être nulle sur le complémentaire d'une partie négligeable sans être intégrable : c'est le cas pour la fonction caractéristique des rationnels sur $[0, 1]$. Cette remarque est l'origine de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

6.6 PRIMITIVES ET INTÉGRALES

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide ;
E désigne un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K}$

6.6.*1*. Propriétés de l'intégrale de Riemann relativement à une borne de l'intervalle compact d'intégration

Dans ce paragraphe, on considère une application f d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, localement intégrable sur I.

Définition. — **A tout $a \in I$ on associe l'application $t \longmapsto \int_a^t f$ de I dans E. On dit que c'est une application intégrale de f.**

Les deux applications intégrales $t \longmapsto \int_a^t f$ et $t \longmapsto \int_b^t f$ diffèrent par une application constante.

Théorème de continuité. — **L'application intégrale $t \longmapsto \int_a^t f$ est continue sur I.**

Soit t_0 un point de I ; il existe un intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset I$ qui est un voisinage de t_0 *pour la topologie de I* (par exemple, si $t_0 \in \mathring{I}$, il existe $[t_0-\eta, t_0+\eta] \subset I$ avec $\eta > 0$) ; f, intégrable sur $[\alpha, \beta]$, est bornée et en utilisant la formule de Chasles, on a :

$$\forall\, t \in [\alpha, \beta] \qquad \left\| \int_a^t f - \int_a^{t_0} f \right\| = \left\| \int_{t_0}^t f \right\| \leqslant \sup_{u \in [\alpha, \beta]} \|f(u)\| \cdot |t-t_0|.$$

La restriction de l'application intégrale à $[\alpha, \beta]$ est ainsi lipschitzienne, et donc continue en t_0 ; comme $[\alpha, \beta]$ est un voisinage de t_0 pour la topologie de I, l'application intégrale est continue en t_0. □

THÉORÈME DE DÉRIVABILITÉ. — **Si f admet une limite à droite (resp. à gauche) au point $t_0 \in I$, alors l'application intégrale $t \longmapsto \int_a^t f$ admet $f(t_0+)$ (resp. $f(t_0-)$) pour dérivée à droite (resp. à gauche) au point t_0.**

— L'existence de $f(t_0+)$ implique celle de $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[t_0, t_0+\eta] \subset I$. Quitte à modifier f en t_0, ce qui ne modifie ni son intégrabilité, ni l'application $t \longmapsto \int_a^t f$, nous pouvons supposer $f(t_0) = f(t_0+)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$, avec $h \leqslant \eta$, tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0+h \Longrightarrow \|f(t) - f(t_0+)\| \leqslant \varepsilon).$$

Il en résulte que, pour tout t vérifiant $t_0 < t \leqslant t_0+h$ on a :

$$\left\| \int_a^t f - \int_a^{t_0} f - (t-t_0)f(t_0+) \right\| \leqslant \int_{t_0}^t \|f - f(t_0+)\| \leqslant \varepsilon(t-t_0).$$

et donc, compte tenu de $t - t_0 > 0$:

$$\left\| \frac{\int_a^t f - \int_a^{t_0} f}{t-t_0} - f(t_0+) \right\| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

— Dans le cas où existe $f(t_0-)$ on raisonne de la même façon, ou on a recours à l'application $t \longmapsto f(-t)$. □

COROLLAIRE. — **L'application intégrale $t \longmapsto \int_a^t f$ est dérivable en tout $t_0 \in I$ en lequel f est continue, la dérivée en t_0 étant alors $f(t_0)$.**

Si t_0 est une borne de I il s'agit naturellement d'une dérivabilité à droite ou à gauche.

6.6.2. Primitives

1° DÉFINITION. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. et $f : I \to E$ une application. On appelle primitive de f sur I toute application $F : I \to E$ qui est dérivable sur I et admet f pour application dérivée.**

2° PROPOSITION. — **Soit $f : I \to E$ admettant $F : I \to E$ pour primitive sur I. Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont les applications $G : I \to E$ de la forme $t \longmapsto G(t) = F(t) + k$, où k est un élément de E.**

— La condition est suffisante puisque, sur tout intervalle, toute application constante est dérivable, de dérivée nulle.

— Elle est nécessaire car si G est une primitive de f sur I, $G-F$ est dérivable sur I de dérivée nulle donc $G-F$ est constante sur I (**4**.2.*1*, 2°). □

COROLLAIRE. — **Avec les mêmes hypothèses, il existe une et une seule primitive de f prenant au point donné $t_0 \in I$ la valeur donnée $y_0 \in E$.**

C'est $t \longmapsto F(t) + y_0 - F(t_0)$.

3° ***Primitives des applications continues.*** — THÉORÈME. — **Soit f une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E. Alors, pour tout point a de I, l'application intégrale $t \longmapsto \int_a^t f$ est une primitive de f sur I.**

En effet, au titre d'application continue, f est localement intégrable sur I. D'autre part $t \longmapsto \int_a^t f$ est dérivable en tout point t_0 de I, de dérivée $f(t_0)$ (corollaire du **6**.6.*1*). □

COROLLAIRE. — **Soit $f : I \to E$ une application continue. Ses primitives sur I sont les applications $t \longmapsto k + \int_a^t f$, où a est un point de I et k un élément de E.**

REMARQUE. — Le lecteur pourra établir à titre d'exercice le résultat suivant : *soit $f: [a, b] \to E$ intégrable, admettant une limite à droite en tout point de $[a, b[$. Alors l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans E admettant $f(t_0+)$ pour dérivée à droite en tout point $t_0 \in [a, b[$ est constitué par les applications $t \longmapsto k + \int_a^t f$.*

4° ***Compléments.*** — Etant donnée une application f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, on peut se demander à quelles conditions cette application admet une primitive sur I. C'est un problème que nous n'aborderons pas ; le lecteur pourra consulter l'exercice **4**.34 qui établit, dans le cas des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$, qu'une condition nécessaire est que f satisfasse au théorème des valeurs intermédiaires. Dans le cas où f est localement intégrable sur I, on peut aussi se demander à quelles conditions l'application intégrale de f, $t \longmapsto \int_a^t f$ est une primitive de f sur I.

PROPOSITION. — **Soit $f : I \to E$, localement intégrable sur I. Alors, pour tout point $a \in I$, l'application intégrale de f, $t \longmapsto \int_a^t f$ est dérivable sur $I \backslash A$, où A est une partie négligeable de $\mathbb{R}$, et en tout point t de $I \backslash A$ sa dérivée est $f(t)$.**

On sait que I est une réunion dénombrable d'intervalles compacts $[a_n, b_n]$; sur chacun d'eux, f intégrable, est continue sauf sur un ensemble négligeable. Le résultat est obtenu en appliquant **6**.6.*1*. et **6**.5.*3*, 2°. □

Nous voyons ainsi que *l'intégration n'est pas l'opération inverse de la dérivation.*

5° ***Généralisation de la notion de primitive.*** — DÉFINITION. — **Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un e.v.n. E. On appelle primitive généralisée de f sur I toute application continue F de I dans E à laquelle on peut associer un sous-ensemble dénombrable D de I tel qu'en tout point t de $I \backslash D$, F admette une dérivée égale à $f(t)$.**

En utilisant l'exercice **4.**33, le lecteur montrera que si F est une primitive généralisée de f sur I, l'ensemble des primitives généralisées de f sur I est l'ensemble des applications $F+k$. En utilisant IV.**2**, il établira aussi que toute application f de I dans un espace de Banach E, dont la restriction à tout intervalle compact inclus dans I est réglée, admet sur I l'ensemble des primitives généralisées $t \longmapsto k + \int_a^t f$ où $a \in I$ et $k \in E$.

6.6.*3*. Développement limité d'une application intégrale

Ce problème sera abordé dans un cadre plus général en **7.2.*4***, **1°**.

6.7. CALCUL DES INTÉGRALES

Il s'agit ici de déterminer pratiquement $\int_a^b f$ *lorsque l'application* $f : [a, b] \to E$ *est intégrable.*

6.7.*1*. Théorème fondamental

Théorème. — **Soient** $[a, b]$ **un intervalle compact de** $\mathbb{R}$, E **un espace de Banach et** $f : [a, b] \to E$ **une application intégrable. Si** $F : [a, b] \to E$ **est une primitive de** f **sur** $[a, b]$ **on a :**

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Si f est continue, c'est une simple conséquence du corollaire du **6.6.*2***, 3°.

— Dans le cas général il suffit d'établir que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\left\| F(b) - F(a) - \int_a^b f \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Nous pouvons disposer d'un couple d'applications en escalier $\varphi : [a, b] \to E$ et $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\|f - \varphi\| \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \psi \leqslant \varepsilon/2. \tag{1}$$

Soit alors $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à φ et ψ,

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, notons λ_i (resp. μ_i) la valeur constante de φ (resp. ψ) sur $]a_{i-1}, a_i[$, et G_i l'application $t \longmapsto F(t) - t\lambda_i$ de $[a_{i-1}, a_i]$ dans E, qui est dérivable, de dérivée $G_i' = f - \varphi$ majorée en module par μ_i sur $]a_{i-1}, a_i[$, d'après (1). D'où, par application de la formule des accroissements finis à G_i sur $[a_{i-1}, a_i]$:

$$\|F(a_i) - F(a_{i-1}) - (a_i - a_{i-1})\lambda_i\| \leqslant \mu_i(a_i - a_{i-1}).$$

En sommant pour i décrivant $\mathbb{N}_n$, il en résulte :

$$\left\|F(b) - F(a) - \int_a^b \varphi\right\| \leqslant \int_a^b \psi \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme (1) implique :

$$\left\|\int_a^b f - \int_a^b \varphi\right\| \leqslant \int_a^b \psi \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

on en déduit :
$$\left\|F(b) - F(a) - \int_a^b f\right\| \leqslant \varepsilon.$$ □

Convention. — On note $[F]_a^b$, *et même* $[F(t)]_a^b$ *pour* $F(b) - F(a)$.

REMARQUES. — *a*) Ce théorème reste vrai avec l'hypothèse : F continue sur $[a, b]$ et admet en tout point t de $]a, b[$ une dérivée à droite de valeur $f(t)$.

b) En utilisant les conventions faites en **6**.2.*2*, 2° proposition VII, le lecteur constatera que si f est une application intégrable de $[\min(a, b), \max(a, b)]$ dans E, et si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f = [F]_a^b.$$

c) En se référant à la définition du **6**.6.*2*, 5°, et en utilisant l'exercice **4**.33, le lecteur vérifiera que le théorème reste vrai avec l'hypothèse : F est une primitive généralisée de f sur $[a, b]$.

6.7.2. Changement de variable et intégration par parties

1° THÉORÈME I. — **Soient** $[a, b]$ **un intervalle compact de** $\mathbb{R}$, E **un espace de Banach,** $f : [a, b] \to E$ **une application intégrable, et** t_0 **un réel. Alors l'application :**

$$g : [a - t_0, b - t_0] \to E, \qquad t \longmapsto f(t + t_0)$$

est intégrable et l'on a :

$$\int_{a-t_0}^{b-t_0} g = \int_a^b f.$$

Démonstration sans difficulté, laissée au lecteur, qui remarquera que, si $\varphi : [a, b] \to E$ est en escalier, alors $\bar{\varphi} : [a-t_0, b-t_0] \to E, t \longmapsto \varphi(t+t_0)$ est en escalier, et que $\int_{a-t_0}^{b-t_0} \bar{\varphi} = \int_a^b \varphi$. □

APPLICATION. — **Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une application périodique de période T, localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$:**

$$\int_0^T f = \int_{t_0}^{t_0+T} f.$$

On écrit $\int_{t_0}^{t_0+T} f = \int_{t_0}^{0} f + \int_0^T f + \int_T^{t_0+T} f$ et on utilise $\int_0^{t_0} f = \int_T^{t_0+T} f$ puisque : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+T) = f(t)$. □

THÉORÈME II. — **Soient $f : [a, b] \to E$ une application intégrable et α un réel non nul. Alors l'application $g : \left[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}\right] \to E$ si $\alpha > 0$ (resp. $\left[\frac{b}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}\right] \to E$ si $\alpha < 0$), $t \longmapsto f(\alpha t)$ est intégrable et l'on a :**

$$\alpha \int_{a/\alpha}^{b/\alpha} g = \int_a^b f.$$

Démonstration analogue, laissée au lecteur. □

APPLICATION. — **Soit $f : [-a, a] \to E$ intégrable. Si f est paire $\int_{-a}^{a} f = 2 \int_0^a f$, si f est impaire $\int_{-a}^{a} f = 0$.**

On écrit : $\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_0^a f$ et on applique le théorème avec $\alpha = -1$. □

2° *Théorème du changement de variable.* — THÉORÈME. — **Soient E un espace de Banach, I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ une application continûment dérivable, $f : J \to E$ une application continue. Alors quels que soient les points α et β de I, on a :**

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f. \quad (1)$$

Remarquons tout d'abord que f, continue sur J, est continue sur l'intervalle compact $[\min [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)], \max [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]]$, ce qui assure l'existence

de $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$; de même $(f \circ \varphi)\cdot\varphi'$ est continue sur I, ce qui assure l'existence de $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\cdot\varphi'$.

L'application f, continue sur J, admet sur J une primitive F (**6.6.2**, 3°), et l'on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = [F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

Puisque $\varphi(I) \subset J$, nous pouvons envisager l'application $F \circ \varphi$ qui est continûment dérivable sur I, de dérivée $(f \circ \varphi)\cdot\varphi'$. Il en résulte, en appliquant à nouveau **6.7.1** :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\cdot\varphi' = [F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} = [F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}. \qquad \square$$

3° ***Notation définitive de l'intégrale.*** — *Dorénavant nous noterons :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad \int_a^b f.$$

On dit que dans cette nouvelle notation, t est une *variable muette* ; elle ne joue aucun rôle et peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre $x, y, u, v, \ldots$ Cependant on se gardera, (par exemple lors de l'utilisation de l'application intégrale $t \longmapsto \int_a^t f$), de la noter comme l'une des bornes de l'intervalle compact sur lequel on prend l'intégrale de f. L'intérêt de cette nouvelle notation réside dans le fait que le théorème du changement de variable s'applique alors de « façon mécanique » (dans la mesure — naturellement — où les hypothèses en sont vérifiées). En effet (1) s'écrit alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Si on dispose de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, le « changement de variable $x = \varphi(t)$ » consiste d'abord à trouver $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$, puis à remplacer x par $\varphi(t)$, $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, et (a, b) par (α, β).

— Si on dispose de $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ le « changement de variable $x = \varphi(t)$ » consiste à remplacer $\varphi(t)$ par x, $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$, et (α, β) par $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$.

EXEMPLES. — a) *Calcul de* $\mathfrak{J} = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$

On prend $I = J = \mathbb{R}_+^*$, $f : x \longmapsto \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ et on effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = 1/t$, qui vérifie visiblement les hypothèses. D'où :

$$\mathfrak{J} = \int_1^{1/2} \frac{1}{(1/t)\sqrt{1+1/t^2}}(-1/t^2)\,dt$$

et :

$$\mathfrak{J} = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = [\ln(t + \sqrt{1+t^2})]_{1/2}^{1} = \ln\frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{5}}$$

b) *Calcul de* $\mathfrak{J} = \int_0^{3\pi/2} \sin^2 t \cos t\,dt$

On prend $I = J = \mathbb{R}$, $\varphi : t \longmapsto \sin t$ et $f : x \longmapsto x^2$. Toutes les hypothèses sont vérifiées et :

$$\mathfrak{J} = \int_0^{-1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{-1} = -\frac{1}{3}.$$

4° ***Théorème d'intégration par parties.*** — THÉORÈME. — **Soient** E, F, G **trois espaces de Banach,** $\top$ **une application bilinéaire continue de** $E \times F$ **dans** G, u **et** v **deux applications continûment dérivables d'un intervalle** I **de** $\mathbb{R}$ **respectivement dans** E **et dans** F. **Alors, quels que soient les points** a **et** b **de** I, **on a :**

$$\int_a^b u(t) \top v'(t)\,dt = [u(t) \top v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) \top v(t)\,dt$$

En effet l'application de I dans G, $t \longmapsto u(t) \top v(t)$, est continûment dérivable, de dérivée $t \longmapsto u'(t) \top v(t) + u(t) \top v'(t)$. Le théorème résulte alors de l'application de **6.7.***1*. □

Ce théorème est employé essentiellement dans deux cas :

a) u et v sont des applications de I dans $\mathbb{C}$ et $\top$ est le produit de deux nombres complexes. On obtient :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$$

b) u est une application complexe ou réelle, v est à valeurs dans un espace de Banach E et $\top : \mathbb{C} \times E \to E$ est l'application $(\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x$. On obtient une expression analogue à celle de *a*).

EXEMPLE. — *Calcul de* $\mathfrak{J} = \int_0^{\pi/2} t \sin t\,dt$.

On adopte $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad t \longmapsto t$

$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad t \longmapsto -\cos t$.

Les hypothèses sont visiblement vérifiées et

$$\mathfrak{I} = [-t\cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = 1.$$

5° *Applications du théorème d'intégration par parties*

a) *Formule de Taylor avec reste intégral.* — THÉORÈME. — **Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach et $f\colon [a, b] \to E$ une application de classe C^{n+1}. Alors :**

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Nous allons vérifier par recurrence qu'une assertion $\mathcal{A}_n$ est vraie.

— $\mathcal{A}_0$, qui s'écrit $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$, est vraie d'après 6.7.*1*.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{A}_{n-1}$ est vraie et considérons

$$f\colon [a, b] \to E, \text{ de classe } C^{n+1}.$$

f est alors de classe C^n et l'on dispose donc de l'égalité :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

Sur $[a, b]$ les deux applications $t \longmapsto -\dfrac{(b-t)^n}{n!}$ et $t \longmapsto f^{(n)}(t)$ sont continûment dérivables, ce qui permet d'appliquer à $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ le théorème d'intégration par parties, et de constater que $\mathcal{A}_n$ est vraie. □

On notera que le changement de variable $u = (t-a)/(b-a)$ permet d'écrire le « reste intégral » de la formule ($\mathcal{A}_n$) sous la forme :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \cdot f^{(n+1)}((1-u)a + ub)\,du.$$

Cette formule de Taylor est d'un emploi parfois plus commode que celles du 4.2.*2*. On notera cependant que les hypothèses utilisées ici sont plus fortes. Le lecteur pourra vérifier que les formules du 4.2.*2* peuvent toutes se déduire du théorème précédent.

b) *Calcul des intégrales de Wallis.* — Il s'agit de la famille d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$.

Le changement de variable $t \longmapsto \dfrac{\pi}{2} - t$ fournit : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, écrivons :

$$I_{n+2}-I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t(\sin^2 t-1)\,dt = -\int_0^{\pi/2} \sin^n t\cos^2 t\,dt.$$

En adoptant $u : t \longmapsto \cos t$ et $v : t \longmapsto 1/(n+1)\cdot\sin^{n+1} t$, qui sont des applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il vient :

$$I_{n+2}-I_n = -\left[\frac{\sin^{n+1} t}{n+1}\cos t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n+1} t}{n+1}\sin t\,dt$$

d'où

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Sachant que $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$, par récurrence on obtient :

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3\cdot 1}{2p(2p-2)\dots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots 4\cdot 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 5\cdot 3} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}$, on a, $I_{n+1} \leqslant I_n$, puisque, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$. De l'inégalité :

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, résultat qui sera repris au tome IV.

De $I_2 I_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\frac{\pi}{2}$, on déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est décroissante et minoré par 0, et donc convergente, admet 0 pour limite, on peut même préciser que $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$ au voisinage de $+\infty$.

6° *Division d'une application par une application polynômiale*

On donne une application f de classe C^m d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E.

a) Lemme. — **Pour tout couple $(a, \alpha) \in I \times \mathbb{N}_m$ vérifiant :**

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(\alpha-1)}(a) = 0 \tag{1}$$

l'application g définie par :

$$g(t) = f(t)/(t-a)^\alpha \quad \text{si} \quad t \neq a; \qquad g(a) = (\alpha!)^{-1} f^{(\alpha)}(a)$$

est de classe $C^{m-\alpha}$ et l'on a :

$$\forall t \in I \qquad \|g^{(m-\alpha)}(t)\| \leqslant \frac{(m-\alpha)!}{m!} \sup_{x\in S(t)} \|f^{(m)}(x)\| \tag{2}$$

où $S(t)$ est le segment d'extrémités t et a.

Soit (a, α) un couple vérifiant (1); par un changement de variable, on se ramène au cas où $a = 0$.
En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral si $t \neq 0$, et une évidence si $t = 0$, on constate :

$$\forall t \in I \qquad g(t) = \int_0^1 \Phi(u, t)\, du$$

où $\Phi : (u, t) \longmapsto \dfrac{(1-u)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha)}(ut)$ est une application de classe $C^{m-\alpha}$ de $[0, 1] \times I$ dans E.

Par applications itérées du théorème du 8.1.*8*, 2° (qui sera provisoirement admis), on en déduit que g est $C^{m-\alpha}$ et que :

$$\forall t \in I \qquad g^{(m-\alpha)}(t) = \int_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha-1} u^{m-\alpha}}{(\alpha-1)!} f^{(m)}(ut)\, du.$$

D'où (2), car on a, par intégrations par parties successives :

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{m-\alpha}\, du = \frac{(\alpha-1)!(m-\alpha)!}{m!}.$$

b) Le théorème suivant pourra être admis en première lecture :

THÉORÈME. — **Soit $n \in \mathbb{N}_m$. Pour tout couple $((a_i)_{i \in \mathbb{N}_n}, (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_n}) \in I^n \times (\mathbb{N}_m)^n$ vérifiant :**

$$(3) \begin{cases} \text{les } a_i \text{ sont distincts; } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \beta \leqslant m \\ \forall i \in \mathbb{N}_n \quad f(a_i) = f'(a_i) = \ldots = f^{(\alpha_i - 1)}(a_i) = 0 \end{cases}$$

l'application $g : I \longrightarrow E$ définie par :

$$(4) \begin{cases} g(t) = f(t) / \prod_{i=1}^{n} (t - a_i)^{\alpha_i} \quad \text{si} \quad t \notin \{a_1, \ldots, a_n\} \\ g(a_i) = (\alpha_i! \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)^{\alpha_j})^{-1} f^{(\alpha_i)}(a_i) \end{cases}$$

est de classe $C^{m-\beta}$ et l'on a :

$$\forall t \in I \qquad \|g^{(m-\beta)}(t)\| \leqslant \frac{(m-\beta)!}{m!} \sup_{x \in S(t)} \|f^{(m)}(x)\| \tag{5}$$

où $S(t)$ est le plus petit segment contenant t et les a_i.

Vérifions par récurrence qu'une assertion $(\mathcal{T}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_m$.

— $\mathcal{T}_1$ est vraie d'après le lemme.

— Soit $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ pour lequel $(\mathcal{T}_n)$ est vraie. Soient :

$$((a_i)_{i \in \mathbb{N}_{n+1}}, (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_{n+1}}) \in I^{n+1} \times (\mathbb{N}_m)^{n+1}$$

un couple qui vérifie :

$$(3') \begin{cases} \text{les } a_i \text{ sont distincts; } \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} = \beta' \leqslant m \\ \forall i \in \mathbb{N}_{n+1} \quad f(a_i) = f'(a_i) = \ldots = f^{(\alpha_i - 1)}(a_i) = 0 \end{cases}$$

et G l'application $I \longrightarrow E$ définie par :

$$(4') \begin{cases} G(t) = f(t) \Big/ \prod_{i=1}^{n+1} (t - a_i)^{\alpha_i} \quad \text{si} \quad t \notin \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \\ G(a_i) = (\alpha_i! \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)^{\alpha_j})^{-1} f^{(\alpha_i)}(a_i) \end{cases}$$

En supprimant a_{n+1} et α_{n+1}, on obtient un couple qui vérifie (3), avec $\beta = \beta' - \alpha_{n+1}$. A ce couple, (4) associe une application g qui, d'après $(\mathcal{F}_n)$, est de classe $C^{m-\beta}$ et vérifie (5).

On remarque qu'il existe un voisinage de a_{n+1} dans I sur lequel g coïncide avec la fonction C^m :

$$t \longmapsto f(t) \Big/ \prod_{j=1}^{n} (t - a_j)^{\alpha_j}$$

et donc que g admet au point a_{n+1} une dérivée d'ordre α_{n+1} donnée par la formule de Leibniz, à savoir :

$$g^{(\alpha_{n+1})}(a_{n+1}) = f^{(\alpha_{n+1})}(a_{n+1}) \Big/ \prod_{j=1}^{n} (a_{n+1} - a_j)^{\alpha_j}.$$

En faisant successivement $t \notin \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$, $t \in \{a_1, \ldots, a_n\}$, $t = a_{n+1}$, on constate :

$$\begin{cases} G(t) = g(t)/(t - a_{n+1})^{\alpha_{n+1}} & \text{si} \quad t \neq a_{n+1} \\ G(a_{n+1}) = (\alpha_{n+1}!)^{-1} g^{(\alpha_{n+1})}(a_{n+1}) \end{cases}.$$

D'après le lemme, G est $C^{m-\beta-\alpha_{n+1}}$, i.e. $C^{m-\beta'}$ et :

$$\forall t \in I \qquad \|G^{m-\beta'}(t)\| \leqslant \frac{(m-\beta')!}{(m-\beta)!} \sup_{x \in S_1(t)} \|g^{(m-\beta)}(t)\|$$

où $S_1(t)$ est ici le segment d'extrémités t et a_{n+1}.

En utilisant cette inégalité et (5), on obtient l'inégalité déduite de (5) en remplaçant β par β' et $S(t)$ par le plus petit segment $S'(t)$ contenant $t, a_1, \ldots, a_{n+1}$. □

c) ***Pratique.*** — On utilise le théorème dans le cas où $m = n$ et où les α_i sont tous égaux à 1 (ici $\beta = m$ et $f^{(m-\beta)} = f$). On obtient :

PROPOSITION. — **Soit $f : I \longrightarrow E$ de classe C^n. Pour toute famille $(a_1, \ldots, a_n)$ de zéros distincts de f, on a :**

$$\forall t \in I \qquad \|f(t)\| \leqslant \frac{1}{n!} \sup_{x \in S(t)} \|f^{(n)}(x)\| \cdot \left| \prod_{i=1}^{n} (t - a_i) \right|.$$

Ce résultat a été utilisé par anticipation :

— au 4.6.*1* à propos de la majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange;

— au 5.3.*3*, 6° à propos du calcul approché d'un zéro d'une fonction par la méthode d'interpolation.

6.7.*3*. Calcul approché d'une intégrale

1° ***Position du problème.*** — Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach qui, dans la pratique, sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $f : [a, b] \longrightarrow E$ une application intégrable sur $[a, b]$. Il est fréquent que l'on ne connaisse pas la valeur $\int_a^b f(t)\,dt$ soit parce que l'on ne connaît pas de primitive de f sous forme d'applications usuelles, soit parce que les calculs auxquels conduirait la recherche d'une telle primitive se révèlent longs et compliqués. On recherche alors une valeur approchée de $\mathfrak{I} = \int_a^b f(t)\,dt$ et on utilise essentiellement deux méthodes :

— soit un développement en série de l'application f, et on utilisera alors le calcul approché de la somme d'une série convergente.

— soit une approximation de f par une application plus simple g ce qui permet d'adopter $\int_a^b g(t)\,dt$ pour valeur approchée de $\mathfrak{J}$.

2° ***Principe du calcul approché de*** $\mathfrak{J}$ ***par interpolation de*** f. — On se donne $n \in \mathbb{N}$, et on subdivise $[a, b]$ en n sous-segments égaux en utilisant les points $a_i = a + i(b-a)/n$; $i \in \{0, ..., n\}$; on note $a_{i-1/2}$ le milieu $a + (i - 1/2)(b-a)/n$ de $[a_{i-1}, a_i]$, $i \in \mathbb{N}_n$.

La méthode consiste à associer à l'intégrale I_i de f sur $[a_{i+1}, a_i]$ l'intégrale J_i sur le même segment de l'application polynômiale de Lagrange, P_i, de degré minimum, qui prend la même valeur que f :

- en $a_{i-1/2}$; deg $P_i = 0$; méthode des rectangles;
- en a_{i-1} et a_i; deg $P_i \leqslant 1$; méthode des trapèzes;
- en a_{i-1}, $a_{i-1/2}$ et a_i; deg $P_i \leqslant 2$; méthode de Simpson.

On adopte $\mathfrak{Z}(n) = \sum_{i=1}^{n} J_i$ pour valeur approchée de $\mathfrak{J} = \sum_{i=1}^{n} I_i$.

Interprétation géométrique pour $E = \mathbb{R}$. — On substitue à l'arc $A_{i-1}A_i$ de Γ, $y = f(x)$, dont les extrémités ont pour abscisses a_{i-1} et a_i, soit un segment de la parallèle à $(O, \vec{i})$ menée par le *point moyen* $A_{i-1/2}$ de Γ dont l'abscisse est $a_{i-1/2}$, soit la corde $A_{i-1}A_i$, soit (en général) la parabole de direction asymptotique $(O, \vec{j})$ qui contient A_{i-1}, $A_{i-1/2}$ et A_i.

Majoration de l'erreur. — Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on se ramène à intégrer dans $[-1, 1]$ en posant $t = a_{i-1/2} + \frac{b-a}{2n} u$. D'où :

$$I_i = \frac{b-a}{2n} \int_{-1}^{1} g_i(u)\,du; \qquad J_i = \frac{b-a}{2n} \int_{-1}^{1} Q_i(u)\,du$$

où : $$g_i(u) = f\left(a_{i-1/2} + \frac{b-a}{2n} u\right); \qquad Q_i(u) = P_i\left(a_{i-1/2} + \frac{b-a}{2n} u\right).$$

Notons que $g_i - Q_i$, que nous notons φ_i, prend la valeur 0, soit en 0, soit en -1 et 1, soit en -1, 0, 1.

— Nous avons ainsi :

$$\|\mathfrak{Z}(n) - \mathfrak{J}\| \leqslant \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} \|e_i\| \tag{1}$$

où e_i est l'intégrale de φ_i sur $[-1, 1]$, qui s'écrit aussi :

$$e_i = \int_0^1 (\varphi_i(u) + \varphi_i(-u))\,du.$$

La méthode consiste à constater que, si, suivant le cas m désigne 2, 2 ou 4, et si l'on se limite à une fonction f de classe C^m, alors pour tout $k \in \{0, 1, ..., m\}$ il existe un polynôme $R_k \in \mathbb{R}[X]$, de degré k, indépendant de i, vérifiant :

$$e_i = (-1)^k \int_0^1 R_k(u)\,[\varphi_i^{(k)}(u) + (-1)^k \varphi_i^{(k)}(-u)]\,du \tag{$\mathcal{A}_k$}$$

En effet, $(\mathcal{A}_0)$ est vraie avec $R_0(X) = 1$. On passe de $(\mathcal{A}_k)$ à $(\mathcal{A}_{k+1})$ par une intégration par parties telle que le terme tout intégré soit nul, ce qui est acquis si l'on dispose d'une primitive R_{k+1} de R_k vérifiant la condition (suffisante, sinon nécessaire) :

$$R_{k+1}(0)[\varphi_i^{(k)}(0) + (-1)^k \varphi_i^{(k)}(0)] = R_{k+1}(1)[\varphi_i^{(k)}(1) + (-1)^k \varphi_i^{(k)}(-1)] = 0 \tag{2}$$

Une fois obtenue $(\mathcal{A}_m)$, on constate $Q_i^{(m)} = O$, et l'on a :

$$\|e_i\| \leqslant 2M_m(g_i)\int_0^1 |R_m(u)|\, du \tag{3}$$

où $M_m(g_i)$ est la borne supérieure de $\|g_i^{(m)}\|$ sur $[-1, 1]$, qui est liée à la borne supérieure $M_m(f)$ de $\|f^{(m)}\|$ sur $[a, b]$ par :

$$M_m(g_i) \leqslant \left(\frac{b-a}{2n}\right)^m M_m(f) \tag{4}$$

En utilisant (1), (3) et (4), on constate que $\|\mathfrak{J}(n) - \mathfrak{I}\|$ est majorée par :

$$\varepsilon(n) = \frac{M_m(f)}{2^m}\frac{(b-a)^{m+1}}{n^m}\int_0^1 |R_m(u)|\, du.$$

3° ***Méthode des rectangles à point moyen.*** — Ici P_i est l'application constante $t \longmapsto f(a_{i-1/2})$. Il est clair que :

$$J_i = (b-a)/n \cdot f(a_{i-1/2}),$$

et :

$$\boxed{\mathfrak{J}_R(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a_i + (2i-1)\,\frac{b-a}{2n}\right).}$$

Majoration de l'erreur. — Nous supposons que f est C^2. Comme $\varphi_i(0) = 0$, (2) est remplie pour $k = 0$ et $k = 1$ si :

$$R_1(1) = 0 \quad \text{et} \quad R_2(1) = 0$$

ce qui fournit :

$$R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = 1/2 \cdot (X-1)^2$$

On calcule : $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (1-u)^2\, du = \dfrac{1}{6}$, et on en déduit :

$$\boxed{\|\mathfrak{J}_R(n) - \mathfrak{I}\| \leqslant \varepsilon_R(n), \quad \text{où} \quad \varepsilon_R(n) = \frac{M_2(f)}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}}$$

4° ***Méthode des trapèzes.*** — Ici P_i est l'application affine telle que $P(a_{i-1}) = f(a_{i-1})$ et $P(a_i) = f(a_i)$. Sans qu'il soit nécessaire d'expliciter $P(t)$, on obtient :

$$J_i = \frac{b-a}{2n}\,(f(a_{i-1}) + f(a_i)), \text{ et :}$$

$$\boxed{\mathfrak{J}_T(n) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)-f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\right).}$$

Majoration de l'erreur. — Nous supposons que f est C^2.
Comme $\varphi_i(1) = \varphi_i(-1) = 0$, (2) est remplie pour $k = 0$ et $k = 1$ si :

$$R_1(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad R_2(1) = 0$$

ce qui fournit :

$$R_1(X) = X \qquad \text{et} \qquad R_2(X) = 1/2 \cdot (X^2 - 1).$$

On calcule : $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (1 - u^2)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{3}$, et on en déduit :

$$\boxed{\|\mathfrak{J}_T(n) - \mathfrak{I}\| \leqslant \varepsilon_T(n), \quad \text{où} \quad \varepsilon_T(n) = \frac{M_2(f)}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}.}$$

REMARQUE. — Pour un même n : $\varepsilon_T(n) = 2\varepsilon_R(n)$.

5° ***Méthode de*** SIMPSON. — Nous aurons à utiliser :

FORMULE DES TROIS NIVEAUX. — **Pour tous** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ **et** $T : t \longmapsto pt^2 + qt + r$ **avec** $(p, q, r) \in E^3$, **on a :**

$$\int_\alpha^\beta T(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\beta - \alpha}{6}\left(T(\alpha) + T(\beta) + 4T\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right).$$

Il suffit de le vérifier pour les fonctions $t \longmapsto 1$, $t \longmapsto t$, $t \longmapsto t^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et d'utiliser la linéarité de l'intégrale. □

• Ici P_i est l'application trinôme qui prend la même valeur que f en a_{i-1}, $a_{i-1/2}$ et a_i. On a donc :

$$J_i = \frac{b-a}{6n}\left(f(a_{i-1}) + f(a_i) + 4f(a_{i-1/2})\right), \text{ et :}$$

$$\boxed{\mathfrak{J}_S(n) = \frac{b-a}{3n}\left[\frac{f(a) - f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) + 2f\left(a + (2i-1)\,\frac{b-a}{2n}\right)\right)\right].}$$

Majoration de l'erreur. — Nous supposons que f est C^4. Comme $\varphi_i(-1) = \varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$, (2) est remplie pour $k = 0, \ldots, 3$ si :

$$R_2(1) = R_3(0) = R_3(1) = R_4(1) = 0$$

ce qui fournit (le coefficient dominant de R_k étant $1/k!$) :

$$\begin{cases} R_3(X) = \dfrac{1}{6}X(X-1)^2; \quad R_2(X) = R_3'(X); \quad R_1(X) = R_3''(X) \\[2ex] \text{et } R_4(X) = \dfrac{1}{24}(X + \lambda)(X-1)^3, \text{ avec } \lambda = \dfrac{1}{3} \text{ (pour que } R_4' = R_3\text{).} \end{cases}$$

On calcule : $\dfrac{1}{24}\displaystyle\int_0^1 \left(u + \dfrac{1}{3}\right)(1-u)^3\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{180}$, et on en déduit :

$$\boxed{\|\mathfrak{J}_S(n) - \mathfrak{I}\| \leqslant \varepsilon_S(n), \quad \text{où} \quad \varepsilon_S(n) = \frac{M_4(f)}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4}.}$$

REMARQUES. — *a*) Il peut sembler que, dans les trois méthodes, le choix des valeurs 2, 2, 4 de m ait été gratuit. En fait, on ne peut faire mieux. C'est ainsi que, dans la méthode de Simpson, si l'on avait voulu utiliser $m = 5$, il aurait fallu adopter : R_5 est divisible par X et $(X-1)^4$, i.e. $R_5(X) = \dfrac{1}{5!}X(X-1)^4$, ce qui est incompatible avec $R_5' = R_4$.

b) Dans le cas $E = \mathbb{R}$, on obtient $\varepsilon(n)$ par une autre méthode (cf. exercice 6.56).

6° ***Calcul de $\mathfrak{J}$ à une précision imposée*** α. — On se limite à $E = \mathbb{R}$. On utilise une calculatrice programmable ou un ordinateur.

Pour valeur N de n à utiliser, on adopte :

$$N = \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon(n) \leqslant \alpha \}.$$

La machine, convenablement programmée, fournit alors une valeur approchée $\mathfrak{J}^*$ de $\mathfrak{J}$. On ne peut affirmer $|\mathfrak{J}^* - \mathfrak{J}| < \alpha$ que si l'erreur de calcul $|\mathfrak{J}^* - \mathfrak{J}(N)|$ est négligeable devant l'*erreur de méthode* $\varepsilon(N)$. C'est le cas si α n'est pas trop petit pour les possibilités de la machine (discussion difficile).

Comparaison des trois méthodes pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ***imposé.*** — Les valeurs de N étant notées N_R, N_T et N_S, le nombre des valeurs de $f(t)$ à calculer est, selon la méthode (et pour N assez grand) voisin de N_R, N_T et $2N_S$. Or on constate aisément :

$$N_T/N_R \simeq \sqrt{2} \quad \text{et} \quad N_R/(N_S)^2 \simeq \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ indépendant de } \alpha).$$

La méthode de Simpson est donc la plus performante des trois; celle des rectangles est meilleure que celle des trapèzes.

REMARQUE. — La parenté entre les trois méthodes tient à :

$$3\mathfrak{J}_S(n) = 2\mathfrak{J}_R(n) + \mathfrak{J}_T(n)$$

EXERCICES

6.01. — Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, des applications continues. On pose :

$$h(x) = \int_a^b |f(t) + x\,g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que, si h admet un minimum relatif au point 0, alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Le résultat s'étend-t-il au cas de $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$?

6.02. — Trouver toutes les applications continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a) \sup_{t \in [a,\, b]} |f(t)|.$$

6.03. — On pose : $f(t) = [(t-a)^n (t-b)^n]^{(n)}$, $a \neq b$. Montrer que, pour toute fonction polynôme g de degré strictement inférieur à n on a :

$$\int_a^b g(t) \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

6.04. — Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, de période 2π, telle que $\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application intégrable. On pose :

$$F(\lambda) = \int_a^b f(t) \cdot g(\lambda t)\,\mathrm{d}t.$$

$F(\lambda)$ admet-il une limite quand λ tend vers $+\infty$?

6.05. — Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable et positive.

On pose : $I_n = \int_0^1 f^n(t)\, dt$. Montrer : $I_n I_{n-2} \geqslant (I_{n-1})^2$, $(n \geqslant 2)$.

6.06. — Soit f une fonction positive ou nulle, intégrable sur $[0, 1]$ et telle que $\int_0^1 f(t)\, dt > 0$. Soit A un polynôme tel que $\int_0^1 A^2(t) f(t)\, dt = 0$. Montrer que A est le polynôme nul.

6.07. — A tout nombre x de $[0, 1]$ dont l'écriture décimale est 0, *abc*..., on associe le réel $f(x)$ dont l'écriture décimale est 0, *bac*... (on permute les deux premières décimales). Etudier la continuité de f. Montrer que f est intégrable et calculer : $\int_0^1 f(t)\, dt$.

6.08. — Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $[0, 1]$. Si f est continue sur $[0, 1]$ et si, pour tout $g \in E$, $\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt = 0$, la fonction f est nulle.

6.09. — Soit $I_n = \int_0^1 t^n \ln(1 + t^2)\, dt$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.

6.10. — Soit E l'espace vectoriel des applications dérivables $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On pose, pour $f \in E$:

$$n_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt \qquad n_2(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

$$n_3(f) = |f(0)| + n_2(f) \qquad n_4(f) = |f(0)| + |f'(0)| + n_2(f).$$

a) Montrer que les quatre applications de E dans $\mathbb{R}_+$ ainsi définies sont des normes.

b) Soient $f \in E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E tels que, pour $i \in \mathbb{N}_4$ donné :

$$\lim_{n \to +\infty} n_i(f_n - f) = 0.$$

Montrer qu'on a la même propriété pour tout $j < i$.

6.11. — *Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour toute solution f de l'équation différentielle : $y'' + y' \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t = 0$, on ait :

$$|f'''(2)| \leqslant M \left(|f(\pi)| + \int_3^5 |f'(t)|\, dt \right).*$$

6.12. — Soit E l'ensemble des applications $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et de période 2π.

a) A toute $f \in E$ on associe la suite de terme général :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt \cdot f(t)\, dt.$$

Vérifier : $$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nt\cdot[f(t)-f(t+\pi/n)]\,dt.$$

b) Montrer que si à $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on peut associer $(k, \alpha) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x)-f(y)| \leqslant k\,|\sin x - \sin y|^\alpha$$

on a alors $f \in E$.

Pour une telle fonction, montrer : $|a_n| < k\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha$.

6.13. — *a*) Montrer que, pour toute application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$,

$$\left(\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt\right) \Longrightarrow \text{(l'une des applications } f^+ \text{ ou } f^- \text{ est nulle).}$$

b) Si f prend des valeurs dans $\mathbb{C}$, que devient la dernière assertion ?

6.14. — Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, $a < b$. On pose :

$$R_n = \int_a^b f(t)\,dt - \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_0^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Dans le cas où f est croissante, montrer que $0 \leqslant R_n \leqslant \frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$;

Dans le cas où f est lipschitzienne de rapport M, montrer que $|R_n| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}$.

Dans le cas où f est de classe C^1, montrer que nR_n tend vers $\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$.

Dans le cas où f est de classe C^2, déterminer deux constantes k et k' telles que

$$R_n = \frac{k}{n} + \frac{k'}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Généraliser.

6.15. — *a*) Soit $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, une application de classe C^1, à dérivée croissante, et γ un point de $]\alpha, \beta[$. Montrer :

$$\forall t \in]\alpha, \beta[\qquad f(t) \geqslant f(\gamma) + (t-\gamma)\,f'(\gamma).$$

b) Soit $g : [a, b] \to]\alpha, \beta[$, $a < b$, une application continue. Montrer :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f[g(t)]\,dt \geqslant f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt\right).$$

6.16. — Soit (u_n) une suite de réels de $[0, 1]$. Pour tout couple (a, b) tel que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on note $N(a, b)$ le nombre d'entiers n compris entre 1 et N tels que $u_n \in [a, b]$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout couple (a, b), $\frac{N(a, b)}{N}$ tend vers $b-a$ quand N tend vers $+\infty$.

b) Pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, $\lim_N \frac{1}{N} \sum_0^N f(u_n) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

6.17. — Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, une application positive et intégrable. Alors l'application $g = \sqrt{f}$ est intégrable.

6.18. — Soit f une fonction positive, continue sur $[a, b]$.

a) Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\int_a^b [f(t)]^n\,\mathrm{d}t} = \sup_{t \in [a, b]} f(t)$.

b) Montrer, plus généralement, que si g est une fonction strictement positive sur $[a, b]$, intégrable sur $[a, b]$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\int_a^b [f(t)]^n\, g(t)\,\mathrm{d}t} = \sup_{t \in [a, b]} f(t).$$

6.19. — Trouver deux constantes α et β telles que :

$$\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2} \qquad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Calculer ainsi : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

6.20. — Soit f continue sur $[0, 1]$. Montrer que $n \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ admet pour limite $f(1)$ lorsque n tend vers plus l'infini.

6.21. — Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continue. Etudier la suite de terme général :

$$a_n = \int_0^1 f(t) \cdot S(nt)\,\mathrm{d}t$$

où S désigne la fonction : $u \longmapsto 4E(u) - 2E(2u) + 1$.

6.22. — Déterminer les fonctions f continues définies sur $[0, 1]$ et les constantes S telles que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$S \cdot f(x) = \int_0^1 \inf(x, t)\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.23. — Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe, et $h \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction g est convexe.

6.24. — On considère un plan euclidien P, rapporté à un repère orthonormal. Soit f positive et continue sur $[a, b]$, (C) le graphe de f et (D) la partie de P limitée par $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et (C). On divise (D) en n parties d'aires égales et limitées par des parallèles à Oy ; soient $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ les abscisses de ces parallèles et $u_n = \dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]$. Calculer la limite de (u_n).

6.25. – Soit f intégrable sur $[a, b]$. Montrer que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,\mathrm{d}x$ converge vers $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

6.26. — Soit F l'ensemble des fonctions continues et ne s'annulant pas sur $[a, b]$. Pour $f \in F$, on pose :

$$P_f = \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right).$$

Déterminer le minimum de P_f lorsque f décrit F. Pour quelles fonctions f le minimum est-il atteint ? Montrer que l'ensemble des nombres P_f n'est pas borné supérieurement.

6.27. — On donne deux réels p et q tels que : $p > 1$, et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a) Vérifier : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad x^{1/p}.y^{1/q} \leqslant \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tous $(a_i, b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q} \qquad \text{(Hölder).}$$

b) Soient f et g des applications intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $(a < b)$. Déduire de 6.5.3, 4° que les applications $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables. Vérifier :

$$\int_a^b |fg| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}.$$

c) En déduire :

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$$

ce qui généralise l'inégalité de Minkowski du 6.3.8.

6.28. — Trouver la limite des suites de termes généraux :

$$y_n = \sin(\pi/n) \sum_0^{n-1} 1/[2+\cos(p\pi/n)]$$

$$z_n = (1/n^3) \sum_1^n p^2 \sin(p\pi/n)$$

$$t_n = (1/n) \sqrt[n]{\prod_{1 \leqslant p \leqslant n} (n+p)}.$$

6.29. — Etudier la convergence, et trouver éventuellement la limite de la suite de terme général :

$$\sqrt[n]{\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]}\ ;\quad \sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$$

$$\left\{\sqrt[n+1]{n}\cdot\sqrt[n+2]{2n}\ \ldots\ \sqrt[n+k]{kn}\ \ldots\ \sqrt[2n]{n^2}\right\}^{\frac{1}{\operatorname{Log} n}}\ ;$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{n+1}\ ;\quad \sum_{k=1}^{k=n}\operatorname{tg}^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}.$$

6.30. — Calculer $\int_0^1 t^2\,dt$ en utilisant des sommes de Riemann.

6.31. — Construire les courbes d'équation :

$$y=\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt\ ;\qquad y=\int_1^x\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\,dt.$$

6.32. — Construire la famille de courbes (C_a) : $f(y)=f(x)+a$ dans les deux cas :

$$f(\xi)=\int_0^{\xi}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt\ ;\qquad f(\xi)=\int_0^{\xi}\frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}\,dt.$$

6.33. — Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x-1}\int_1^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt.$$

6.34. — Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=e^{-x^2}\cdot\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall\ x\in\mathbb{R}\qquad f'(x)+2x\,f(x)=1.$$

Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que sur $]0,+\infty[$ la fonction $x\longmapsto\frac{1}{2x}e^{x^2}\cdot f'(x)$ est décroissante.

En déduire l'existence de $0<x_0<1$ tel que $\frac{1}{2x_0}\cdot e^{x_0}\cdot f'(x_0)=0$. En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et que $f(x)\sim\frac{1}{2x}$ au voisinage de $+\infty$.

d) Montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et trouver une fonction équivalente à f au voisinage de 0 dans l'échelle $(|x|^{\alpha})_{\alpha\in\mathbb{R}}$.

6.35. — Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on pose : $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} \cdot dt$. Étudier la limite éventuelle de g lorsque x tend vers 1.

6.36. — Soient un réel $a \in [0, 1]$ et une application f localement intégrable de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \int_0^{at} f(u)\, du$$

a) Montrer que f est de classe C^∞ et calculer ses dérivées successives.

b) Que peut-on en déduire pour f?

6.37. — On donne $c \in \mathbb{R}_+$. Soient u et v deux applications continues et positives de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t)\, dt.$$

Montrer : $$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad u(x) \leqslant c \exp\left(\int_0^x v(t)\, dt\right)$$

6.38. Calculer : $\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arc\,cos} \sqrt{t}\, dt.$

6.39. — Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \operatorname{sh} t}\, dt.$

a) Montrer qu'il existe : $l = \lim_{x \to 0} f(x)$, On prolonge f à $\mathbb{R}$, en convenant que $g(0) = l$.

b) Montrer que la fonction g ainsi obtenue est dérivable au point 0 et calculer $g'(0)$.

6.40. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application localement intégrable. On suppose qu'il existe une constante $h > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$2hf(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$

Montrer que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer les fonctions f pour lesquelles l'égalité précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$.

6.41. — *Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + \int_0^x (x-t) \cdot f(t)\, dt = 1.$$

(On montrera qu'il s'agit de solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$).*

6.42. — Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, continue, telle que :

$$\int_0^\pi f(t)\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cdot\sin t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f admet au moins deux zéros sur $]0, \pi[$.

6.43. — Soient α un réel strictement positif, et F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^1 t^\alpha \cdot \sin tx \cdot \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x > 0$ on a :

$$F(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^x t^\alpha \sin t \cdot \mathrm{d}t.$$

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a la relation :

$$x\,F'(x) + (\alpha+1)\,F(x) = \sin x.$$

Que pensez-vous de F sur $\mathbb{R}$?

6.44. – Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall t > 0 \qquad f(t) \leqslant k \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$$

Montrer que f est une application nulle.

6.45. — Soit f une fonction intégrable dans un intervalle $[-a, a]$, $a > 0$, et continue en 0. Trouver la limite quand x tend vers 0 de $(1/x^2)\cdot\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$. Donner une autre démonstration dans l'hypothèse où f est continue.

6.46. — Soit f une fonction intégrable sur $[0, 1]$ et continue en 0, telle que $f(0) = 0$. Montrer que $x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

6.47. — Soit f une fonction strictement croissante et continue sur $[0, a]$, telle que $f(0) = 0$. On pose $g = f^{-1}$. Montrer que

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) = 0$$

pour tout x de $[0, a]$.

1° dans le cas où f est dérivable ; 2° dans le cas général.

Montrer que $0 \leqslant u \leqslant a$ et $0 \leqslant v \leqslant f(a)$ impliquent :

$$uv \leqslant \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^v g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Application : montrer que :

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \text{si } p > 1 \text{ et } \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*6.48. — Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = 1/t - E(1/t)$ pour $t \neq 0$, ($E(1/t)$ est la partie entière de $1/t$). Montrer que f est intégrable sur $[0, 1]$ et exprimer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de la constante d'Euler.

(Cet exercice suppose connue l'étude des séries).*

6.49. — Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(t) \leqslant k \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Montrer que $f = 0$.

6.50. — Pour $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, on pose $x = \frac{p}{q}$, p et q entiers premiers entre eux et on définit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ par $f(x) = 0$ si $x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ et $f(x) = \frac{1}{q}$ pour $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Montrer que f est intégrable et que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

6.51. — *a*) Soit $f : [a, b] \to E$ intégrable. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\varphi : [a, b] \to E$ et $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier, *continues à droite* en tout point de $[a, b[$ et telles que :

$$\|f - \varphi\| \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi \leqslant \varepsilon.$$

c) Utiliser ce résultat pour retrouver le théorème : Si $f : [a, b] \to E$ admet une dérivée f' *intégrable* sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$. (Remarquer que $t \longmapsto \int_a^t \varphi$ et $t \longmapsto \int_a^t \psi$ sont dérivables à droite si φ et ψ sont continues à droite, et utiliser le théorème des accroissement finis).

6.52. — Déterminer les applications $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement intégrables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt.$$

6.53. — Soit $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, de classe C^2, telle que $f'' \geqslant 0$. Etudier le signe de

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t\,dt.$$

6.54. — Soit φ une fonction continue et à valeurs strictement positives sur $[a, b]$. On pose :

$$f(x) = \int_a^b \varphi^x(t)\,dt.$$

Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \ln f(x)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Quels sont les sens de variation possibles pour f?

6.55. — Soit l_0 l'espace vectoriel des suites réelles (a_n) telles que $\lim a_n = 0$, normé par $\|(a_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

1° Montrer que l_0 est un espace de Banach.

2° On considère dans l_0 le sous-ensemble l_0' des suites presque nulles ($(a_n) \in l_0'$ si et seulement si $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ est fini). Montrer que l_0' est un sous-espace vectoriel de l_0 dont une base est $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $e_n = (\delta_{np})_{p \in \mathbb{N}}$, δ_{np} désignant le symbole de Kronecker.

3° Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (qui est dénombrable). On considère l'application f de $[0, 1]$ dans l_0 définie par :

Pour $t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ $\quad f(t) = 0$

Pour $t \in \mathbb{Q}$, alors $t = \varphi(n)$ et $f(t) = e_n$.

Montrer que f n'est pas intégrable.

Montrer que les sommes de Riemann de f ont une limite suivant la base de filtre $\mathcal{B}'$.

6.56. — Formule de Simpson. — *a*) Soit $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, impaire et 5 fois dérivable. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$g(1) = \frac{1}{3}(g'(1) + 2g'(0)) - \frac{1}{180} g^{(5)}(\theta).$$

b) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe C^4. On pose :

$$\mathfrak{I} = \int_a^b f(t)\,dt; \qquad \mathfrak{I}' = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$\mathfrak{I} - \mathfrak{I}' = -\frac{(b-a)^5}{2\,880} f^{(4)}(\xi).$$

c) Montrer que $\mathfrak{I}'$ s'écrit : $\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t$, où P est le polynôme du second degré de $\mathbb{R}[X]$ tel que la courbe d'équation $y = P(x)$ contienne les points

$$(a, f(a))\,; \quad \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right); \quad (b, f(b)).$$

7
COMPLÉMENTS SUR LES INTÉGRALES

Ce chapitre comprend trois sous-chapitres qui n'ont que peu de rapports les uns avec les autres ; en revanche chacun d'eux est plus ou moins tributaire de la théorie de l'intégrale de Riemann qui vient de faire l'objet du chapitre **6**.

7.1. CALCUL DES PRIMITIVES

Dans ce sous-chapitre, il ne sera question que d'applications continues. La théorie de l'intégrale de Riemann n'interviendra que pour nous apprendre (**6**.6.*2*, 3°) *que toute application continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. Tout le reste est du ressort de la dérivation.*

7.1.*1*. Notations. Primitives usuelles

1° ***Position du problème.*** — Etant donnée une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, nous nous proposons de trouver des intervalles aussi grands que possible sur chacun desquels f est continue et, pour chacun de ces intervalles, une expression aussi simple que possible des primitives de f.

La notation
$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+k, \qquad t \in I \tag{1}$$

signifie que $t \longmapsto f(t)$ est continue sur I, que $t \longmapsto F(t)$ en est une primitive sur I, et que k est une constante réelle arbitraire.

Le plus souvent, on sous-entend « $t \in I$ ». L'écriture (1) peut même être valable sur plusieurs intervalles, mais des précautions sont alors nécessaires (c'est ainsi que la constante k est liée à l'intervalle I).

Par extension, il nous arrivera de chercher les primitives d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.

EXEMPLE. — L'écriture $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + k$ signifie que :

— sur $\mathbb{R}_+^*$ les primitives de $t \longmapsto 1/t$ sont les $t \longmapsto \operatorname{Log} t + k$

— sur $\mathbb{R}_-^*$ les primitives de $t \longmapsto 1/t$ sont les $t \longmapsto \operatorname{Log}(-t) + k$

Nous n'établissons aucun lien entre deux fonctions appartenant respectivement à l'une et à l'autre des deux familles que nous venons d'introduire.

Formulaire

Dans chaque cas le lecteur cherchera le, ou les intervalles d'étude.

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + k \qquad \int t^\alpha \, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$$

$$\int \cos t \, dt = \sin t + k \qquad \int \sin t \, dt = -\cos t + k$$

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + k \qquad \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{cotg} t + k$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + k \qquad \int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + k$$

$$\int \operatorname{tg} t \, dt = -\ln |\cos t| + k \qquad \int \operatorname{cotg} t \, dt = \ln |\sin t| + k$$

$$\int \operatorname{ch} t \, dt = \operatorname{sh} t + k \qquad \int \operatorname{sh} t \, dt = \operatorname{ch} t + k$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + k \qquad \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{coth} t + k$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2 \operatorname{Arc tg}(e^t) + k \qquad \int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{t}{2} \right| + k$$

$$\int \operatorname{th} t \, dt = \ln \operatorname{ch} t + k \qquad \int \operatorname{coth} t = \ln |\operatorname{sh} t| + k$$

$$\int e^{mt} \, dt = \frac{1}{m} e^{mt} + k, \ (m \in \mathbb{C}^*) \qquad \int a^t \, dt = \frac{a^t}{\ln a} + k, \ (a \in \mathbb{R}_+^* \setminus (\{1\})$$

Dans la suite, on suppose : $a \in \mathbb{R}^*$.

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arc tg} \frac{t}{a} + k \qquad \int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t-a}{t+a} \right| + k$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \operatorname{Arc sin} \frac{t}{|a|} + k = -\operatorname{Arc cos} \frac{t}{|a|} + k_1$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \operatorname{Arg sh} \frac{t}{|a|} + k = \ln (t + \sqrt{t^2 + a^2}) + k_1$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arg ch} \dfrac{t}{|a|} + k = \ln (t + \sqrt{t^2 - a^2}) + k_1 & \text{sur }]|a|, +\infty[\\ -\operatorname{Arg ch} \left| \dfrac{t}{a} \right| + k = \ln |t + \sqrt{t^2 - a^2}| + k_1 & \text{sur }]-\infty, -|a|[\end{cases}$$

Retenir : $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b}} = \ln |t + \sqrt{t^2 + b}| + k, \ (b \in \mathbb{R}^*).$

Résoudre le problème posé ci-dessus c'est effectuer une *intégration* (ou une *quadrature*) ; on parle quelquefois du calcul d'une *intégrale indéfinie.*

2° En utilisant les calculs de dérivées du chapitre 4, le lecteur amorcera le *tableau des primitives* de la page 243. Ce tableau sera complété en cours d'étude.

7.1.2. Procédés généraux de recherche de primitives

1° ***Utilisation de la linéarité de l'intégrale.***

2° ***Changement de variable.*** – I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

• THÉORÈME I. – **Soient les applications $f : J \to \mathbb{R}$ continue, et $\varphi : I \to J$ dérivable. Si $F : J \to \mathbb{R}$ est une primitive de f, alors $F \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $(f \circ \varphi).\varphi'$.**

On applique à $F \circ \varphi$ le théorème de dérivation des applications composées (**4**.1.2, 3°). □

Pratique. – On recherche les primitives d'une application de I dans $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire $(f \circ \varphi).\varphi'$, où $f : J \to \mathbb{R}$ est continue et où $\varphi : I \to J$ est de classe C^1 (ce qui garantit que les primitives existent). Si l'on sait trouver une primitive F de f (sur J), on a :

$$\int f[\varphi(t)].\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F[\varphi(t)] + k, \qquad t \in I \tag{1}$$

• THÉORÈME II. – **Soient $f : J \to \mathbb{R}$ une application continue, et $\varphi : I \to J$ un homéomorphisme dérivable, tel que φ' ne prenne pas la valeur 0. Si $H : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $(f \circ \varphi).\varphi'$, alors $H \circ \varphi^{-1} : J \to \mathbb{R}$ est une primitive de f.**

On applique les théorèmes de dérivation des applications composées (**4**.1.2, 3°) et réciproques (**4**.3.3, 3°). D'où :

$$(H \circ \varphi^{-1})' = (H' \circ \varphi^{-1}).(\varphi^{-1})' = (H' \circ \varphi^{-1}).\frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$

Or :

$$H' \circ \varphi^{-1} = ((f \circ \varphi).\varphi') \circ \varphi^{-1} = f.(\varphi' \circ \varphi^{-1})$$ □

et donc :

$$(H \circ \varphi^{-1})' = f.$$

Pratique. – On recherche les primitives de $f : J \to \mathbb{R}$ continue. Si $\varphi : I \to J$ est un C^1-difféomorphisme, ce qui garantit l'existence des primitives de $(f \circ \varphi).\varphi'$, et si l'on sait trouver l'une d'elles H, alors on a :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H[\varphi^{-1}(x)] + k, \qquad x \in J \tag{2}$$

• Selon le cas, le changement de variable « $x = \varphi(t)$ » ramène le calcul de H à celui de F (formule (1)), ou le calcul de F à celui de H (formule (2)). Voici un exemple de chacun de ces calculs :

EXEMPLES. — *a*) *Etudions* $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2+a}}\,dt$

Si $a > 0$, les primitives de $t \longmapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^2+a}}$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Si $a \leqslant 0$ on doit étudier séparément les deux intervalles $I_1 =]\sqrt{-a}, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, -\sqrt{-a}[$.

L'écriture $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{t^2+a}}\,(t^2+a)'\,dt$ suggère le changement de variable : $x = t^2 + a$ qui ramène au calcul celui de : $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + k, x \in \mathbb{R}_+^*$.

Finalement sur tous les intervalles utiles : $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2+a}}\,dt = \sqrt{t^2+a}+k$.

On notera que φ n'est pas un homéomorphisme.

b) *Soit à calculer* $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx, x \in [-1, +1]$.

Travaillons d'abord sur $]-1, +1[$.

$\varphi : t \longmapsto \sin t$ est un C^∞-difféomorphisme de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]-1, +1[$.

Effectuons le changement de variable $x = \sin t$; on écrit : $dx = \cos t\,dt$, ce qui nous ramène à calculer :

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + k, \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

D'où : $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = 1/2 \cdot \text{Arc}\sin x + 1/2 \cdot x\sqrt{1-x^2} + k, \quad x \in]-1, +1[.$ (3)

Pour k donné, le second membre de (3), $F_k(x)$, est prolongeable par continuité en 1 et en -1 ; il en est de même pour la dérivée $F_k'(x) = \sqrt{1-x^2}$. D'après 4.2.*1*, 2°, l'égalité (3) vaut sur $[-1, 1]$, et ceci bien que $x \longmapsto \text{Arc}\sin x$ et $x \longmapsto x\sqrt{1-x^2}$ ne soient pas dérivables en 1 et en -1.

3° ***Intégration par parties.*** — La formule $(uv)' = u'v + uv'$ montre que, si u et v sont des applications de classe C^1 d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\int u(t)\,v'(t)\,dt = u(t)\,v(t) - \int u'(t)\,v(t)\,dt, \qquad t \in I$$

formule que l'on retient sous la forme : $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Cette formule est intéressante toutes les fois qu'il intervient une fonction telle que Arc tg, Arg th, Arc sin, Log, dont la dérivée est soit une fonction rationnelle, soit une fonction qui s'exprime au moyen de radicaux portant sur des polynômes.

EXEMPLE. — *Soit à calculer* : $\int \ln t \,\mathrm{d}t,\ t \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose $u = \ln t$ et $\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$. On a $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$; on peut *choisir* $v = t$.

Il vient : $\int \ln t \,\mathrm{d}t = t \ln t - \int \mathrm{d}t = t(\ln t - 1) + k$.

4° ***Emploi d'une formule de récurrence.*** — Voir par exemple 7.1.*3*.

7.1.*3*. Primitives d'une fonction rationnelle

Soit $f(X) \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle. La fonction $t \longmapsto f(t)$ est continue sur le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des pôles (réels) de la fraction $f(X)$. Les primitives de $t \longmapsto f(t)$ existent sur tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun pôle.

Pour les obtenir, on décompose en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

a) La *partie entière* est une fonction polynôme dont on sait trouver les primitives.

b) Un *élément simple de première espèce* $t \longmapsto \dfrac{A}{(t-a)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, admet la primitive :

$$t \longmapsto \frac{-A}{(\alpha-1)(t-a)^{\alpha-1}} \text{ si } \alpha > 1, \qquad t \longmapsto A \operatorname{Log}|t-a| \text{ si } \alpha = 1.$$

c) Un *élément simple de seconde espèce* s'écrit $\dfrac{at+b}{((t-p)^2 + q^2)^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}_+^*$. On écrit :

$$at = a(t-p) + ap.$$

Les primitives de $t \longmapsto \dfrac{t-p}{((t-p)^2+q^2)^\alpha}$ se calculent aisément grace au changement de variable $t \longmapsto u = (t-p)^2+q^2$.

Le calcul des primitives de $t \longmapsto \dfrac{1}{((t-p)^2+q^2)^\alpha}$ est ramené, par un changement de variable affine à celui de

$$F_\alpha(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^\alpha}, \quad (\alpha \in \mathbb{N}^*), \quad x \in \mathbb{R}$$

pour lequel nous disposons des deux méthodes suivantes :

PREMIÈRE MÉTHODE. — Le changement de variable $x \longmapsto \varphi = \operatorname{Arc\,tg} x$,

dont on déduit $d\varphi = \dfrac{dx}{x^2+1}$ et $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{x^2+1}$, ramène au calcul de :

$$\int \cos^{2(\alpha-1)}\varphi\, d\varphi, \quad \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

qui sera étudié au 7.1.*4*, 1°.

DEUXIÈME MÉTHODE. — On recherche une formule de récurrence faisant intervenir F_α. Intégrons par parties, en adoptant :

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{(x^2+1)^\alpha}, & du = \dfrac{-2\alpha x}{(x^2+1)^{\alpha+1}}\, dx \\ dv = dx, & v = x \end{cases}$$

Il vient :

$$F_\alpha(x) = \frac{x}{(x^2+1)^\alpha} + 2\alpha \int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{\alpha+1}}\, dx$$

ce qui s'écrit :

$$2\alpha F_{\alpha+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^\alpha} + (2\alpha-1)F_\alpha(x).$$

La connaissance de $F_1(x) = \text{Arc tg}\, x + k_1$ permet, de proche en proche, d'obtenir $F_\alpha(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Notons qu'*il suffit d'introduire une constante d'intégration k_α en fin de calcul.*

REMARQUE. — La seconde méthode n'a d'intérêt que lorsque, pour α assez grand ($\alpha > 3$) on a besoin de $F_1, F_2, \ldots, F_\alpha$.

EXEMPLE. — *Calcul de* $H(t) = \displaystyle\int \frac{1-t}{(t^2+t+1)^2}\, dt.$

Ecrivons : $$H(t) = -\frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)\, dt}{(t^2+t+1)^2} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}$$

$$H(t) = \frac{1}{2(t^2+t+1)} + G(t), \quad \text{avec} \quad G(t) = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}.$$

L'égalité : $t^2+t+1 = (t+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2$ conduit à poser (en économisant le changement de variable affine): $t+1/2 = \sqrt{3}/2.\ \text{tg}\,\varphi$ et, d'une manière plus précise :

$$\varphi = \text{Arc tg}\, \frac{2t+1}{\sqrt{3}}.$$

D'où : $$t^2+t+1 = \frac{3}{4\cos^2\varphi} \quad \text{et} \quad dt = \sqrt{3}/2 \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Ainsi : $$G(t) = \frac{4}{\sqrt{3}}\int \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\varphi + \sin 2\varphi) + k.$$

Mais : $$\sin 2\varphi = \frac{2\,\text{tg}\,\varphi}{1+\text{tg}^2\varphi} = \frac{\sqrt{3}(2t+1)}{2(t^2+t+1)},$$

et

$$G(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{2t+1}{2(t^2+t+1)} + k.$$

Finalement :

$$H(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{t+1}{t^2+t+1} + k.$$

REMARQUE. — La fonction $t \longmapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$, $(\alpha \geqslant 2)$, admet la primitive $t \longmapsto \frac{1}{(1-\alpha)(t-a)^{\alpha-1}}$, et cela même si $a \in \mathbb{C}$ (4.1.2, 4°). Il pourra être intéressant d'utiliser une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Soit, par exemple, à calculer : $H(t) = \int^{\cdot} \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}$.

Le lecteur vérifiera que, en notant $j = (-1+i\sqrt{3})/2$ et $j^2 = (-1-i\sqrt{3})/2$, on a :

$$\frac{9}{(t^2+t+1)^2} = \frac{-3}{(t-j)^2} + \frac{-3}{(t-j^2)^2} - 2i\sqrt{3}\left(\frac{1}{t-j} - \frac{1}{t-j^2}\right).$$

D'où :

$$9\,H(t) = \frac{3}{t-j} + \frac{3}{t-j^2} + 6\,H_1(t), \quad \text{avec} \quad H_1(t) = \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

ou

$$9\,H(t) = \frac{3(2t+1)}{t^2+t+1} + 6H_1(t).$$

L'élément simple de seconde espèce qu'il reste à intégrer est plus simple que celui qui intervenait au début.

7.1.*4*. Primitives d'une fonction rationnelle de sin et cos

Soit $R(X, Y) \in \mathbb{R}(X, Y)$ une fraction rationnelle. On se propose de calculer les primitives de la fonction de variable réelle :

$$t \longmapsto f(t) = R(\sin t, \cos t).$$

1° ***R(X, Y) est un polynôme.*** — Les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$.

La linéarité ramène au cas de : $t \longmapsto \sin^p t \cos^q t$.

— Si p (resp. q) est impair, le changement de variable $x = \cos t$ (resp. $x = \sin t$) ramène à chercher les primitives d'un polynôme.

— Si p et q sont pairs, on « linéarise » en utilisant les expressions de $\cos^p t$ et $\sin^q t$ en fonction des lignes trigonométriques des multiples de t obtenues au I.5.1.*6* (par recours à l'exponentielle complexe).

EXEMPLES. — *a*) $\int \cos^4 t \sin^3 t \, dt$.

En posant $x = \cos t$, on a $dx = -\sin t \, dt$. Il s'agit de calculer :

$$\int x^4 (x^2-1)\, dx = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + k.$$

D'où : $$\int \cos^4 t \sin^3 t \, dt = \frac{1}{7}\cos^7 t - \frac{1}{5}\cos^5 t + k.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int \sin^{2n} t \, dt$ s'écrit :

$$\frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{2n}^j \frac{\sin 2(n-j)t}{n-j} + \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n t + k.$$

c) Pour p et q assez petits, on utilise :

$$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t, \; 2\sin^2 t = 1 - \cos 2t.$$

C'est ainsi que :

$$\begin{aligned} 16\cos^4 t \sin^2 t &= 4\sin^2 2t \cos^2 t = (1-\cos 4t)(1+\cos 2t) \\ &= 1 + \cos 2t - \cos 4t - 1/2 \cdot (\cos 6t + \cos 2t) \end{aligned}$$

et : $$\int \cos^4 t \sin^2 t \, dt = \frac{t}{16} + \frac{\sin 2t}{64} - \frac{\sin 4t}{64} - \frac{\sin 6t}{192} + k.$$

2° ***R(X, Y) n'est pas un polynôme.*** — *a*) *Méthode générale.* — On effectue le changement de variable : $t = 2 \operatorname{Arc\,tg} u + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

On a : $$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin t = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dt = \frac{2du}{1+u^2}.$$

On est ramené à $\int R_1(u) \, du$, où R_1 est une fonction rationnelle.

Notons que, pour m donné, le changement de variable fournit les primitives de $t \longmapsto f(t)$ sur ceux des sous-intervalles de $I_m =](2m-1)\pi, (2m+1)\pi[$ sur lesquels la fonction f est définie. Or, il n'y a aucune raison *a priori* pour que les primitives soient discontinues aux points $2m\pi + \pi$. Il pourra donc y avoir à raccorder (au point $(2m+1)\pi$) les restrictions d'une même primitive à I_m et à I_{m+1}.

b) *Les changements de variable simplificateurs.* — On peut écrire :

$$R(X, Y) = \frac{P_1(X^2, Y) + XP_2(X^2, Y)}{Q_1(X^2, Y) + XQ_2(X^2, Y)}$$

où P_1, P_2, Q_1, Q_2 sont des polynômes de $\mathbb{R}[X, Y]$.

Après multiplication des deux membres par $Q_1(X^2, Y) - XQ_2(X^2, Y)$, on obtient : $$R(X, Y) = R_1(X^2, Y) + XR_2(X^2, Y),$$

où R_1 et R_2 sont des fractions rationnelles, éléments de $\mathbb{R}(X, Y)$.

Ainsi $f(t) = R(\sin t, \cos t)$ peut s'écrire :

$$f(t) = f_1(\cos t) + \sin t \, f_2(\cos t).$$

Il en résulte que *$f(t)$ est de la forme* : $\sin t \, f_2(\cos t)$ — *ce qui permet de prendre pour nouvelle variable $u = \cos t$ — si, et seulement si f est impaire.*

— On montre de même que $f(t)$ *est de la forme* : $\cos t\, f_3(\sin t)$ — *ce qui permet de prendre pour nouvelle variable* $u = \sin t$ — *si, et seulement si, pour tout* t *appartenant à l'ensemble de définition de* f *on a* : $f(\pi - t) = -f(t)$.

— Enfin on montre de façon analogue que $f(t)$ *est de la forme* : $f_4(\cos^2 t)$ — *ce qui permet de prendre pour nouvelle variable* $u = \operatorname{tg} t$ — *si, et seulement si, pour tout* t *appartenant à l'ensemble de définition de* f *on a* : $f(\pi + t) = f(t)$.

EXEMPLES. — *a*) En posant $u = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ on obtient :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln |u| + k; \quad \text{d'où :} \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \ln \left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + k.$$

Ici la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sin t}$ est discontinue aux points $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. La question du raccordement ne se pose pas : la formule obtenue est valable sur tout intervalle $]m\pi, (m+1)\pi[$, $m \in \mathbb{Z}$.

Le changement de variable $x = t + \dfrac{\pi}{2}$ conduit à :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + k, \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right[.$$

b) Pour calculer $F(t) = \displaystyle\int \frac{\cos^3 t}{\sin^5 t}\,\mathrm{d}t$, on utilise $f(\pi - t) = -f(t)$, ce qui conduit à poser $u = \sin t$. On écrit :

$$F(t) = \int \frac{(1-\sin^2 t)\cos t}{\sin^5 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-u^2}{u^5}\mathrm{d}u\,.$$

D'où : $$F(t) = -\frac{\operatorname{cotg}^4 t}{4} + k, \quad t \in]m\pi, (m+1)\pi[.$$

c) En posant $u = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ on obtient : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u+u^2}$.

On en déduit que sur tout intervalle $I_m =](2m-1)\pi, (2m+1)\pi[$ les primitives de $t \longmapsto \dfrac{1}{2+\sin t}$ sont les fonctions $t \longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{2\operatorname{tg} t/2 + 1}{\sqrt{3}} + k_m$.

Si on veut, par exemple, une primitive F continue sur $[0, 2\pi]$, on pourra adopter :

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\operatorname{tg} t/2 + 1}{\sqrt{3}} \qquad \text{si } t \in [0, \pi[\,;$$

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\operatorname{tg} t/2 + 1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \qquad \text{si } t \in]\pi, 2\pi] \quad \text{et} \quad F(\pi) = \pi/\sqrt{3}.$$

7.1.5. Primitives d'une fonction rationnelle de sh et ch

Soit $R(X, Y) \in \mathbb{R}(X, Y)$. On se propose de calculer les primitives de :

$$t \longmapsto f(t) = R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t).$$

1° Les méthodes sont les mêmes qu'au paragraphe précédent. En particulier, dans le cas général on effectue le changement de variable $t = 2 \operatorname{Arg\,th} u$,

qui s'écrit aussi $u = \operatorname{th}\frac{t}{2}$. On a ici :

$$\operatorname{ch} t = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1-u^2}.$$

On notera que u prend ses valeurs dans $]-1, +1[$.

EXEMPLES. — *a*) $\int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u}$ donne : $\int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t} = \ln \left|\operatorname{th}\frac{t}{2}\right| + k$.

expression valable d'une part sur $\mathbb{R}_+^*$, d'autre part sur $\mathbb{R}_-^*$.

b) $\int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$ donne : $\int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t} = 2 \operatorname{Arc\,tg}\left(\operatorname{th}\frac{t}{2}\right) + k$, expression valable sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi écrire : $\int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t} = \int \frac{2\,e^t\,\mathrm{d}t}{e^{2t}+1} = 2 \operatorname{Arc\,tg}(e^t) + k_1$.

Un éventuel changement de variable simplificateur pourra se déceler en liant la recherche des primitives de $t \longmapsto R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$ à celles des primitives de $t \longmapsto R(\sin t, \cos t)$.

2° Comme dans toute recherche de primitives de fonctions de la forme $t \longmapsto R_1(e^t)$, où $R_1(X)$ est une fraction rationnelle, on pourra effectuer le changement de variable $x = e^t$, qui s'écrit aussi $t = \operatorname{Log} x$. On ramène ainsi :

$$\int R_1(e^t)\,\mathrm{d}t \quad \text{à} \quad \int \frac{R_1(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad (a \text{ priori } x \in \mathbb{R}_+^*).$$

EXEMPLE. — $F(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}^3 t + \operatorname{ch}^3 t - 1}$

$$8(\operatorname{sh}^3 t + \operatorname{ch}^3 t) = (e^t - e^{-t})^3 + (e^t + e^{-t})^3 = 2\,e^{3t} + 6\,e^{-t}.$$

On peut vérifier que les primitives sont à calculer sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
En posant $x = e^t$ on se ramène à:

$$\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x^4 - 4x + 3} = \int \frac{4\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2\,(x^2+2x+3)}, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$F(t) = \frac{-2}{3}\,\frac{1}{e^t - 1} + \frac{2}{9} \ln \frac{e^{2t} + 2e^t + 3}{(e^t - 1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{9} \operatorname{Arc\,tg} \frac{e^t + 1}{\sqrt{2}} + k.$$

7.1.6. Intégrales abéliennes

1° ***Position du problème.*** — Soient $R \in \mathbb{R}(X, Y)$ et $g : I \longmapsto \mathbb{R}$, où I est un intervalle, une application continue. On se propose de calculer :

$$F(x) = \int R(x, g(x))\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

On se limite au cas où les conditions suivantes sont remplies :

i) Le graphe Γ de g est inclus dans une *courbe algébrique*, c'est-à-dire dans un ensemble de la forme :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}, \text{ où } P \text{ est un polynôme.}$$

ii) On connaît une représentation paramétrique de classe C^1 de C, ce qui signifie qu'il existe deux applications φ et ψ, de classe C^1, d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ (ou d'une réunion J d'intervalles) dans $\mathbb{R}$ telles que C soit l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(\varphi(t), \psi(t))$, avec $t \in J$; la représentation paramétrique est dite *unicursale* lorsque φ et ψ sont des fonctions rationnelles.

iii) Sous réserve que l'on fractionne éventuellement I, il existe un intervalle $K \subset J$ tel que la restriction de φ à K induise un C^1-difféomorphisme de K sur I.

Conformément à la méthode générale, nous sommes ainsi ramenés au calcul des primitives sur K de $t \longmapsto R(\varphi(t), g(\varphi(t))). \varphi'(t)$, et, puisque $g(\varphi(t))$ n'est autre que $\psi(t)$, à calculer :

$$H(t) = \int R(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in K$$

et nous en déduirons $F(x) = H(\varphi^{-1}(x))$.

2° ***Recherche des primitives de***

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \quad (R \in \mathbb{R}(X, Y), n \in \mathbb{N}^*, ad-bc \neq 0).$$

Ici C est la courbe algébrique d'équation : $(cx+d)y^n - (ax+b) = 0$, et on peut utiliser y pour paramètre. D'où :

Règle : On pose $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

On calcule $x = \dfrac{-dy^n+b}{cy^n-a}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{ad-bc}{(cy^n-a)^2}\, ny^{n-1}\,\mathrm{d}y$ et on est ramené au cas d'une fraction rationnelle.

Exemple. — $F(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$.

Posons $y = \sqrt[6]{x}$, ce qui établit un C^∞-difféomorphisme de I sur I. D'où $x = y^6$, $\mathrm{d}x = 6y^5\,\mathrm{d}y$ et

$$F(x) = 6\int \frac{y^3\,\mathrm{d}y}{y+1} = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(1+\sqrt[6]{x})\right) + k.$$

3° ***Recherche des primitives de*** $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $(R \in \mathbb{R}(X, Y)$. Nous supposerons $a \neq 0$ (sinon nous serions ramenés au 1°).

Ici Γ est la partie de la conique C, d'équation $y^2 = ax^2+bx+c$, qui

est contenue dans le demi-plan $y \geqslant 0$. Nous distinguerons trois cas, suivant sgn a, et sgn(b^2-4ac).

1er CAS : $a < 0$. Il est alors nécessaire que l'on ait $b^2-4ac > 0$, sinon il n'existerait aucun intervalle non vide et non réduit à un point sur lequel $x \longmapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$ serait défini. Nous avons :

$$ax^2+bx+c = (-a)(q^2-(x-p)^2) = (-a)(x-\alpha)(\beta-x)$$

avec $q > 0$, $\quad \alpha = p-q, \quad \beta = p+q.$

Ici C est une ellipse de centre $(p, 0)$, de sommets $(\alpha, 0)$ et $(\beta, 0)$.

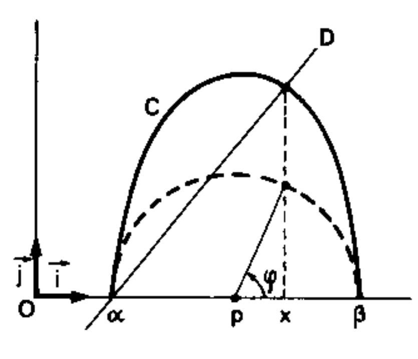


FIG. 8

Nous allons rechercher les primitives sur $[\alpha, \beta]$, ou sur des sous-intervalles s'il existe des points en lesquels $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ n'est pas défini. Il nous arrivera de commencer à travailler sur $]\alpha, \beta[$, nous réservant de voir par la suite s'il est possible de prolonger à $[\alpha, \beta]$.

Nous disposons de deux paramétrages de C. Le premier, unicursal, est obtenu en coupant C par une droite D qui pivote autour du sommet $(\alpha, 0)$ [resp. $(\beta, 0)$] ; le second, calqué sur le paramétrage classique du cercle, fait appel à des lignes trigonométriques.

Première méthode. — On pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$.

Etant donné que nous avons convenu : $\alpha < \beta$, t décrit $\mathbb{R}_+$ et x décrit $]\alpha, \beta[$. Nous avons :

$$-a(x-\alpha)(\beta-x) = t^2(x-\alpha)^2$$

et, comme $x \neq \alpha$: $x = \dfrac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2-a}$. D'où :

$$x-\alpha = a\,\frac{\alpha-\beta}{t^2-a}, \quad \sqrt{\ } = a\,\frac{(\alpha-\beta)t}{t^2-a}, \qquad \mathrm{d}x = -2a\,\frac{(\alpha-\beta)t}{(t^2-a)^2}\,\mathrm{d}t.$$

EXEMPLE. — $F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{(-2x^2+x+1)^{3/2}}\mathrm{d}x.$

Ici : $-2x^2+x+1 = 2(x+1/2)(1-x)$; $\alpha = -1/2$, $\beta = 1$. On travaille sur $]-1/2, 1[$.
Pour la simplicité du calcul, posons : $\sqrt{\ } = t(x-1)$, étant entendu que t décrira $\mathbb{R}_-^*$.

Nous avons à calculer :

$$\int \frac{t^2-1}{t^2+2}\,\frac{(t^2+2)^3}{(-3t)^3}\,\frac{6t}{(t^2+2)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{9}\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

ce qui conduit à : $F(x) = \dfrac{2}{9}\,\dfrac{x+2}{\sqrt{-2x^2+x+1}} + k.$

Deuxième méthode. — On pose :

$$x-p = q\cos\varphi, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = q\sqrt{-a}\sin\varphi, \qquad 0<\varphi<\pi$$

EXEMPLE. — Reprenons le dernier calcul, en posant :

$$x-1/4 = 3/4\cdot\cos\varphi, \qquad \sqrt{\ } = 3\sqrt{2}/4\cdot\sin\varphi, \qquad 0<\varphi<\pi.$$

Nous avons : $\mathrm{d}x = -3/4\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Nous devons calculer :

$$-\frac{\sqrt{2}}{9}\int\frac{1+3\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{9}\int\left(\frac{-1}{\sin^2\varphi}+\frac{-3\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{9}\left(\operatorname{cotg}\varphi+\frac{3}{\sin\varphi}\right)+k.$$

D'où $F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{9}\,\dfrac{\cos\varphi+3}{\sin\varphi}+k = \dfrac{2}{9}\,\dfrac{3/4.\cos\varphi+9/4}{3\sqrt{2}/4.\sin\varphi}+k = \dfrac{2}{9}\,\dfrac{x+2}{\sqrt{-2x^2+x+1}}+k$

On retrouve le résultat précédent.

2ᵉ CAS : $a>0$ et $b^2-4ac<0$. Nous avons :

$$ax^2+bx+c = a((x-p)^2+q^2), \qquad q>0.$$

C est une hyperbole de centre $(p, 0)$ qui n'a aucun point sur l'axe $(O, \vec{i})$.

Nous disposons de deux paramétrages de C. Le premier, unicursal, est obtenu en coupant C par une droite D, parallèle à une asymptote ; le second fait appel à des lignes hyperboliques.

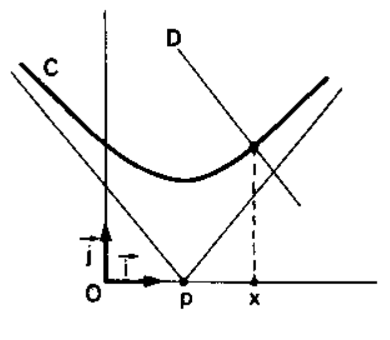


FIG. 9

Première méthode. — On pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t$ (resp. $-x\sqrt{a}+t$) t décrit $]-\infty, -p\sqrt{a}[$ (resp. $]\,p\sqrt{a}, +\infty[$).

EXEMPLE. — $F(x) = \displaystyle\int\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+x+1})^2}\,\mathrm{d}x.$

Dans chacun des intervalles d'étude $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$, nous avons visiblement

intérêt à poser : $\sqrt{x^2+x+1} = -x+t$ (plutôt que : $x+t$). Il vient :

$$x = \frac{t^2-1}{2t+1}, \quad dx = 2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}\,dt,$$

ce qui nous conduit à calculer :

$$2\int \frac{t^2+t+1}{t^2(2t+1)^2}\,dt.$$

Selon l'intervalle étudié, t décrit $]-1/2, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

Nous laissons au lecteur le soin d'achever le calcul.

Deuxième méthode. — On pose ;

$$x-p = q \operatorname{sh} \varphi, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = q\sqrt{a} \operatorname{ch} \varphi$$

φ, égal à $\operatorname{Arg\,sh} \dfrac{x-p}{q}$, décrivant $\mathbb{R}$.

Quelle que soit la méthode utilisée, le calcul est plus facile que celui qui va suivre.

3e CAS : $a > 0$ et $b^2-4ac > 0$. Nous avons :

$$ax^2+bx+c = a((x-p)^2-q^2) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

avec $q > 0$, $\alpha = p-q$, $\beta = p+q$.

Ici C est une hyperbole de centre $(p, 0)$, de sommets $(\alpha, 0)$ et $(\beta, 0)$.

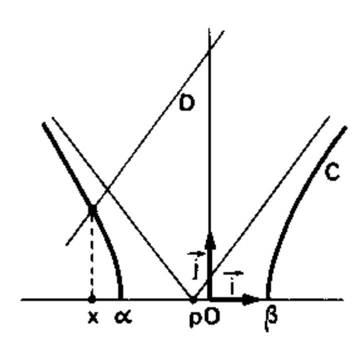


FIG. 10

Nous avons à travailler successivement sur $[\beta, +\infty[$ et sur $]-\infty, \alpha]$.

Nous considérerons d'abord des intervalles ouverts, de façon à avoir des difféomorphismes.

Première méthode. — On pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t$ (resp. $-x\sqrt{a}+t$).

On détermine alors soigneusement les deux intervalles que peut décrire t.

Deuxième méthode. — Pour obtenir les primitives sur $]\beta, +\infty[$, *on pose*

$$x-p = q \operatorname{ch} \varphi, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = q\sqrt{a} \operatorname{sh} \varphi$$

φ, égal à $\operatorname{Arg\,ch} \dfrac{x-p}{q}$, décrivant $\mathbb{R}_+^*$.

— *Pour obtenir les primitives sur* $]-\infty, \alpha[$, *on pose*

$$x-p = -q \operatorname{ch} \varphi, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = q\sqrt{a} \operatorname{sh} \varphi$$

φ, égal à $\operatorname{Arg ch} \dfrac{-x+p}{q}$, décrivant $\mathbb{R}_+^*$.

REMARQUE. — Comme dans le 1er cas, on peut aussi poser

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t(x-\alpha).$$

EXEMPLE. — $F(x) = \displaystyle\int (x^2+6x+5)^{3/2} \, dx$.

Ici : $x^2+6x+5 = (x+3)^2-4 = (x+1)(x+5)$.

Posons : $x+3 = 2\varepsilon \operatorname{ch} \varphi$, $\sqrt{x^2+6x+5} = 2 \operatorname{sh} \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}_+^*$ en convenant que ε désigne $+1$ ou -1, selon que l'on travaille sur $]-1, +\infty[$ ou sur $]-\infty, -5[$. Nous avons ainsi à calculer :

$$16\,\varepsilon \int \operatorname{sh}^4 \varphi \, d\varphi = 2\,\varepsilon \int (\operatorname{ch} 4\varphi - 4 \operatorname{ch} 2\varphi + 3) d\varphi,$$

ce qui fournit : $\qquad \varepsilon \operatorname{sh} 2\varphi(\operatorname{ch} 2\varphi - 4) + 6\,\varepsilon\varphi + k.$

Nous avons : $\varepsilon \operatorname{sh} 2\varphi = 2\,\varepsilon \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi = 1/2(x+3)\sqrt{x^2+6x+5}$

$$2(\operatorname{ch} 2\varphi + 1) = (x+3)^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} 2\varphi - 4 = 1/2(x^2+6x-1)$$

$$e^{\varepsilon\varphi} = \operatorname{ch} \varphi + \varepsilon \operatorname{sh} \varphi = \varepsilon/2(x+3+\sqrt{x^2+6x+5})$$

$$\varepsilon\varphi = \ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}| - \ln 2.$$

Finalement, sur les deux intervalles ouverts considérés nous avons :

$$F(x) = 1/4(x+3)(x^2+6x-1)\sqrt{x^2+6x+5} + 6 \ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}| + k_1. \qquad (1)$$

Comme le second membre de (1) et sa dérivée admettent des prolongements continus en -5 et en -1, l'égalité (1) vaut sur $[-1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -5]$.

4° ***Compléments.*** — *a*) Le calcul de $\displaystyle\int R(t, \sqrt{\alpha t+\beta}, \sqrt{\gamma t+\delta}) \, dt$ se ramène à celui de $\displaystyle\int R_1(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, en posant $\sqrt{\alpha t+\beta} = x$.

b) Le calcul de $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+\alpha)^n\sqrt{\beta t^2+\gamma t+\delta}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, se simplifie en posant $1/(t+\alpha) = x$.

5° AUTRE EXEMPLE. — *Soit à calculer* $F(x) = \displaystyle\int \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)} \, dx$. La courbe C est ici le « cubique » $y^3-(x+1)^2(x-1) = 0$, dont on obtient un paramétrage unicursal en coupant par une droite qui pivote autour du « point double » $(-1, 0)$, soit $y = t(x+1)$. On se ramène au calcul de :

$$H(t) = 12 \int \frac{t^3 \, dt}{(1-t^3)^3}$$

(Le lecteur précisera les intervalles d'étude).

Par parties : $u = t$, $dv = 12\,t^2(1-t^3)^{-3}dt$; $du = dt$, $v = 2(1-t^3)^{-2}$.

On écrit : $H(t) = \dfrac{2t}{(1-t^3)^2} - 2\displaystyle\int \frac{dt}{(1-t^3)^2} = \frac{2t}{(1-t^3)^2} - 2\int \frac{dt}{1-t^3} - 2K(t)$.

$K(t) = \displaystyle\int \frac{t^3\,dt}{(1-t^3)^2}$ se calcule en posant : $u = t$, $dv = t^2(1-t^2)^{-2}\,dt$.

Finalement la seule fonction rationnelle à intégrer est

$$\frac{1}{t^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+2}{t^2+t+1}\right).$$

En fin de calcul, on revient à x grâce à $t = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Remarque. — En écrivant $F(x) = \displaystyle\int (x+1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$, on se ramène au 2°.

7.1.7. Primitives du produit d'une exponentielle par un polynôme

1° *Soit à calculer :* $F(t) = \displaystyle\int e^{mt}\,P(t)\,dt$, $(m \in \mathbb{R}^*,\ P \in \mathbb{K}[X])$.

Une intégration par parties (avec $u = P(t)$) conduit à

$$F(t) = \frac{1}{m}\,e^{mt}\,P(t) - \frac{1}{m}\int e^{mt}\,P'(t)\,dt.$$

En itérant :

$$F(t) = e^{mt}\left(\frac{1}{m}\,P(t) - \frac{1}{m^2}\,P'(t)\right) + \frac{1}{m^2}\int e^{mt}\,P''(t)\,dt.$$

En un nombre fini de pas on a (en posant $p = \deg(P)$)

$$F(t) = e^{mt}\left(\frac{1}{m}\,P(t) - \frac{1}{m^2}\,P'(t) + \ldots + (-1)^p\,\frac{1}{m^{p+1}}\,P^{(p)}(t)\right) + k.$$

Pratiquement, on retient :

$$\int e^{mt}\,P(t)\,dt = e^{mt}\,Q(t) + k$$

et on détermine le polynôme Q, dont l'unicité est triviale, par la condition :

$$mQ(X) + Q'(X) = P(X).$$

La méthode des coefficients indéterminés conduit à résoudre un *système échelonné* d'équations linéaires.

2° Nous anticipons ici sur l'étude de l'exponentielle complexe et nous considérons comme acquis que l'application $t \longmapsto e^{mt}$, ($m \in \mathbb{C}$), de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ admet me^{mt} pour dérivée en tout $t \in \mathbb{R}$, et comme acquises les formules :

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) ; \qquad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it}).$$

Nous pouvons ainsi :

— étendre les résultats du 1° au cas où $m \in \mathbb{C}^*$

— calculer : $\int \cos(mt)\, P(t)\, \mathrm{d}t$ et $\int \sin(mt)\, P(t)\, \mathrm{d}t$.

EXEMPLE. — *Calculer* $F(t) = \int (t^2-t+1)\cos 2t\, \mathrm{d}t$.

Nous avons : $F(t) = \mathcal{R}e\,(G(t))$ avec $G(t) = \int (t^2-t+1)\, e^{2it}\, \mathrm{d}t$.

Posons : $G(t) = (at^2+bt+c)e^{2it}+\lambda$.

Nous avons:

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; 2i(at^2+bt+c) + 2at+b = t^2-t+1.$$

D'où : $a = -i/2$; $b = (1+i)/2$; $c = -(1+i)/4$

$$G(t) = \left(-\frac{i}{2}t^2 + \frac{1+i}{2}t - \frac{1+i}{4}\right)(\cos 2t + i \sin 2t) + \lambda$$

et : $$F(t) = \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)\cos 2t + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)\sin 2t + k.$$

7.2. INTÉGRALES IMPROPRES

Dans ce sous-chapitre E désigne un espace de Banach, [a, b[désigne un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que

$$-\infty < a < b \leqslant +\infty$$

7.2.1. Notion d'intégrale impropre

1° A toute application $f : [a, b[\to E$, localement intégrable (i.e. intégrable sur tout sous intervalle compact de $[a, b[$) nous associons l'application :

$$F : [a, b[\to E \qquad x \longmapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Cette notation sera conservée tout au long du sous-chapitre 7.2.

DÉFINITION I. — **Si F admet une limite[1] I au point b, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a un sens, ou qu'elle est convergente et on lui attribue la valeur[2] I; on dit aussi que l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge.**

DÉFINITION II. — **Si F n'admet pas de limite au point b, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'a pas de sens, ou qu'elle est divergente; on dit aussi que l'intégrale de f sur $[a, b[$ diverge.**

REMARQUES. — *a*) Certains auteurs parlent *d'intégrales généralisées*, au lieu d'intégrales impropres.

b) Soit $c \in [a, b[$. Par la formule de Chasles :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = A + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad A = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les intégrales de f sur $[a, b[$ et sur $[c, b[$ sont donc de *même nature* (i.e. toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes); en cas de convergence, les intégrales impropres diffèrent de A.

c) La nature et éventuellement la valeur de l'intégrale impropre d'une application à valeurs dans l'espace de Banach E ne changent pas si on remplace la norme par une norme équivalente.

2° PREMIERS EXEMPLES. — *a*) La fonction $t \longmapsto e^{-t}$ est continue, et donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1-e^{-x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{-x}) = 1$, il en résulte que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que sa valeur est 1.

b) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue, et donc localement intégrable sur $[0, 1[$. Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $\int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arc\,sin} x$. On en déduit que l'intégrale impropre $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente et que sa valeur est $\pi/2$.

c) De $\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = -\sin x$ et $\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = 1-\cos x$ on déduit que les intégrales des fonctions cos et sin sur $[0, +\infty[$ divergent.

3° ***Complément dans le cas $b \in \mathbb{R}$.*** — Il peut se faire que $f : [a, b[\to E$ soit une restriction d'une application intégrable $\hat{f} : [a, b] \to E$. Alors F est une restriction d'une application continue

$$\hat{F} : [a, b] \to E \qquad x \longmapsto \int_a^x \hat{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il en résulte que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, et est égale à $\int_a^b \hat{f}(t)\,\mathrm{d}t$.

---

(1) Dans ce sous-chapitre, quand nous parlerons de limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, il s'agira exclusivement d'une limite finie.

(2) Comme le problème de l'étude d'une limite, celui de l'étude d'une intégrale impropre comprend deux parties : *existence*, et (s'il y a lieu) *calcul*.

D'après 6.4.*2*, 2° cette circonstance se produit si, et seulement si f est bornée et localement intégrable sur $[a, b[$. Ainsi, dans le cas $b < +\infty$, l'étude que nous entreprenons n'apporte quelque chose de nouveau que si f n'est pas bornée sur $[a, b[$.

4° ***Extension à*** $]b', a']$, ***avec*** $-\infty \leqslant b' < a' < +\infty$. — DÉFINITION. — **Soit** $f\colon\ ]b', a'] \to E$ **une application localement intégrable. Si l'application** $x \longmapsto \int_x^{a'} f(t)\,\mathrm{d}t$ **admet une limite** J **quand** x **tend vers** b'**, on dit que l'intégrale impropre** $\int_{b'}^{a'} f(t)\,\mathrm{d}t$ **a un sens, ou qu'elle est convergente, et on lui attribue la valeur** J**. Dans le cas contraire on dit que l'intégrale impropre est divergente.**

D'après $\int_x^{a'} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a'}^{-x} f(-t)\,\mathrm{d}t$, les intégrales impropres

$$\int_{b'}^{a'} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-a'}^{-b'} f(-t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature, et égales en cas de convergence. On peut donc toujours se ramener à l'hypothèse $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, que nous reprenons dans toute la suite.

7.2.*2*. Propriétés des intégrales impropres

1° PROPOSITION I. — **L'ensemble des applications** $[a, b[\to E$ **dont l'intégrale sur** $[a, b[$ **converge est un sous-espace vectoriel de** $\mathcal{F}([a, b[, E)$**;** $f \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **est une application linéaire de ce sous-espace dans** E**.**

Simple conséquence des théorèmes sur les limites. □

REMARQUE. — Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b[$ dans E. Si les intégrales de f et g sont de nature différente, alors l'intégrale de $f+g$ diverge.

L'intégrale de $f+g$ peut converger, alors que les intégrales de f et g divergent (penser à $g = -f$) ; des précautions s'imposent lorsqu'on est conduit à « scinder » une intégrale impropre (cf. Exemple du 7.2.*6*, 4°).

PROPOSITION II. — **Soient** E **et** E' **des espaces de Banach et** u **une application linéaire continue de** E **dans** E'**. Si** $f\colon [a, b[\to E$ **admet une intégrale impropre convergente, il en est de même de** $u \circ f\colon [a, b[\to E'$**, et**

$$\int_a^b (u \circ f)(t)\,\mathrm{d}t = u\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Il s'agit d'une conséquence de la proposition III du 6.2.2, 3° et du fait que, u étant continue, on a :

$$\lim_{x \to b} u(F(x)) = u(\lim_{x \to b} F(x)). \qquad \square$$

PROPOSITION III. — **Soit** $E = \prod_{k=1}^{m} E_k$ **un produit d'espaces de Banach; on note** p_k **la projection canonique** $E \to E_k$**, et** q_k **l'injection canonique** $E_k \to E$**. L'intégrale impropre de l'application** $f\colon [a, b[\to E$ **converge si, et seulement si l'intégrale impropre de chacune des applications** $f_k = p_k \circ f$, $(k \in \mathbb{N}_m)$**, converge. On a alors:**

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{m} q_k\left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Se déduit des propositions I et II, compte tenu de $f = \sum_k q_k \circ f_k$ et $f_k = p_k \circ f$. $\square$

COROLLAIRE. — **Soient** E **un e.v.n. de dimension finie,** $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ **une base de** E**, et** $f = \sum_{k=1}^{m} f_k e_k$ **une application localement intégrable de** $[a, b[$ **dans** E**. Alors l'intégrale impropre de** f **converge si, et seulement si, pour tout** $k \in \mathbb{N}_m$**, l'intégrale impropre de** $f_k\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ **converge. On a alors:**

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{m}\left(\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t\right) e_k.$$

CAS PARTICULIER. — **L'intégrale impropre de** $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ **converge si, et seulement si les intégrales impropres de** $\mathfrak{Re}(f)$ **et** $\mathfrak{Im}(f)$ **convergent. On a alors:**

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathfrak{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathfrak{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

2° *Le critère de Cauchy.* — THÉORÈME. — **Soit** $f\colon [a, b[\to E$ **une application localement intégrable. L'intégrale de** f **sur** $[a, b[$ **converge si, et seulement si** f **vérifie la condition suivante, dite critère de Cauchy :**

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$**, il existe** $c \in [a, b[$ **tel que:**

$$\forall (x', x'') \in [c, b[\times [c, b[\qquad \left\| \int_{x'}^{x''} f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit d'appliquer à F le critère de Cauchy relatif à l'existence d'une limite au point b ; c'est possible puisque $\overline{\mathbb{R}}$ est métrisable et puisqu'on a supposé que l'e.v.n. E, dans lequel F prend ses valeurs, est *complet*. $\square$

3° ***Convergence absolue.*** – Soit $f : [a, b[\to E$ une application localement intégrable. Il résulte du 6.2.2, 3° que $\|f\| : [a, b[\to \mathbb{R}$ est une application localement intégrable, à valeurs positives.

Plaçons-nous dans le cas où l'intégrale de $\|f\|$ sur $[a, b[$ converge. D'après le critère de Cauchy (compris comme condition nécessaire), pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $c \in [a, b[$ tel que

$$\forall (x', x'') \in [c, b[\times [c, b[\qquad \left| \int_{x'}^{x''} \|f(t)\| \, dt \right| \leqslant \varepsilon$$

et *a fortiori* tel que

$$\forall (x', x'') \in [c, b[\times [c, b[\qquad \left\| \int_{x'}^{x''} f(t) \, dt \right\| \leqslant \varepsilon.$$

D'après le critère de Cauchy (compris comme condition suffisante), l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soit** f: $[a, b[\to E$ **une application localement intégrable. Une condition suffisante pour que l'intégrale de** f **sur** $[a, b[$ **converge est que l'intégrale de** $\|f\|$ **sur** $[a, b[$ **converge. Lorsqu'elle est remplie, on dit que** $\int_a^b f(t) \, dt$ **est une intégrale** *absolument convergente* ; **on a alors :**

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\| \, dt.$$

7.2.3. Convergence des intégrales des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1° ***Condition nécessaire et suffisante de convergence.*** — THÉORÈME. — **Soit** f: $[a, b[\to \mathbb{R}$ **une application localement intégrable, à valeurs positives. L'intégrale de** f **sur** $[a, b[$ **converge si, et seulement si la partie** $F([a, b[)$ de $\mathbb{R}$ **est majorée ;** $\int_a^b f(t) \, dt$ **est alors la borne supérieure de** $F([a, b[)$.

Dans le cas contraire, on a : $\lim_{x \to b} F(x) = +\infty$.

Rappelons que $F(x)$ désigne $\int_a^x f(t) \, dt$.

Ici F est une application croissante ; en effet, pour $a \leqslant x' \leqslant x'' < b$, on a

$$F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(t) \, dt \geqslant 0.$$

La proposition résulte du 4.3.1, 3°. □

REMARQUE. — S'agissant d'une intégrale impropre sur $]b', a']$, avec $-\infty \leqslant b' < a' < +\infty$ et $f \geqslant 0$, l'application $F : x \longmapsto \int_x^{a'} f(t) \, dt$ est décroissante. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale converge est encore que $F(]b', a'])$ soit majorée ; *les résultats qui suivent s'appliquent sans qu'il y ait lieu de changer les signes dans les inégalités.*

2° ***Les critères de comparaison.*** — THÉORÈME. — **Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $0 \leqslant f \leqslant g$. Alors :**

i) **Si l'intégrale de g sur $[a, b[$ converge, il en est de même de celle de f et**

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

ii) **Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ diverge, il en est de même de celle de g.**

Ici : $\quad \forall\, x \in [a, b[\quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$

et *i*) est un corollaire du théorème du 1° ; *ii*) s'en déduit par contraposition.

REMARQUE. — Hormis les inégalités (1), la proposition reste valable sous l'hypothèse moins forte : il existe $a' \in [a, b[$ tel que, pour tout $t \in [a', b[$, $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.

3° ***Application à l'étude de la convergence absolue.*** — A titre d'exercice, le lecteur fera une étude parallèle à celle du IV. 1.2.*1*, 3° (séries). Il montrera que : *une application f localement intégrable de $[a, b[$ dans un e.v.n. de dimension finie E est absolument convergente si, et seulement si les applications composantes le sont* ; ce résultat s'applique à $\mathbb{C}$.

4° ***Domination et convergence.*** — PROPOSITION I. — **Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives au voisinage de b (i.e. au moins sur un sous-intervalle $[c, b[$ de $[a, b[$), vérifiant $f = O(g)$ au voisinage de b. Alors :**

i) **Si l'intégrale de g sur $[a, b[$ converge, il en est de même de celle de f ;**

ii) **Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ diverge, il en est de même de celle de g.**

Compte tenu de la positivité, l'hypothèse $f = O(g)$ entraîne (**5**.1.*2*) l'existence de $a' \in [a, b[$ et de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall\, t \in [a', b[\quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \alpha g(t) \tag{2}$$

Puisque $\alpha \neq 0$, les intégrales de g et αg sont de même nature. La proposition résulte de la proposition et de la remarque précédentes. □

COROLLAIRE. — **Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b[$, respectivement dans l'espace de Banach E et dans $\mathbb{R}$, avec $g \geqslant 0$. Si, au voisinage de b, $f = O(g)$, la convergence sur $[a, b[$ de l'intégrale de g implique l'absolue convergence de celle de f.**

PROPOSITION II. — **Soient deux applications localement intégrables f: $[a, b[\to E$ et g : $[a, b[\to \mathbb{R}$, cette dernière étant à valeurs positives au voisinage de b. On suppose qu'il existe $k \in E \setminus \{0\}$ tel que $f \sim kg$ au voisinage de b. Alors les intégrales sur $[a, b[$ de f et g sont de même nature.**

• En première lecture, on pourra se limiter au cas où $E = \mathbb{R}$. Les intégrales de f et $-f$ étant de même nature, on peut supposer $k > 0$. Alors f est aussi à valeurs positives au voisinage de b. En outre $f = O(g)$, ce qui montre que si l'intégrale de g converge il en est de même de celle de f, et $g = O(f)$, ce qui montre que si l'intégrale de f converge il en est de même de celle de g. □

• Venons-en au cas général. — Si l'intégrale de g converge, celle de f converge absolument, d'après $\|f\| = O(g)$.

Supposons maintenant que l'intégrale de f converge.

D'après $f-kg = o(kg)$, il existe $a' \in [a, b[$ tel que :

$$\forall t \in [a', b[\qquad \|(f-kg)(t)\| \leqslant 1/2 \, \|k\| \, g(t).$$

Pour tout couple (x', x'') d'éléments de $[a', b[$ tel que $x' \leqslant x''$ on a :

$$\left\| \int_{x'}^{x''} f(t)\,\mathrm{d}t - k \int_{x'}^{x''} g(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_{x'}^{x''} \|(f-kg)(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant 1/2 \, \|k\| \int_{x'}^{x''} g(t)\,\mathrm{d}t$$

et *a fortiori*, du fait de l'inégalité triangulaire :

$$\left\| k \int_{x'}^{x''} g(t)\,\mathrm{d}t \right\| - \left\| \int_{x'}^{x''} f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant 1/2 \, \|k\| \int_{x'}^{x''} g(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui s'écrit :
$$\|k\| \int_{x'}^{x''} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2 \left\| \int_{x'}^{x''} f(t)\,\mathrm{d}t \right\|.$$

La condition de Cauchy, satisfaite par f à cause de l'hypothèse, est donc aussi satisfaite par g ; l'intégrale de g converge. □

REMARQUE IMPORTANTE. — Si g est à valeurs négatives, il suffit d'écrire $f \sim (-k)(-g)$ pour constater que le résultat reste valable. En revanche, le résultat ne s'étend pas au cas où g n'est ni à valeurs positives, ni à valeurs négatives (*cf.* exemple au 7.2.6, 3°).

7.2.4. Complément sur l'intégration des relations de comparaison

1° THÉORÈME I. — **Soient E un espace de Banach, f et φ des applications localement intégrables de $[a, b[$, respectivement dans E et $\mathbb{R}_+$. On suppose que l'intégrale impropre $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Alors au voisinage de b, suivant $[a, b[$:**

i) **la relation $f = O(\varphi)$ entraîne :** $$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right);$$

ii) **la relation $f = o(\varphi)$ entraîne :** $$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right);$$

iii) **la relation $f \sim k\varphi$ avec $k \in E \backslash \{0\}$ entraîne :** $$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \sim k \int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarquons tout d'abord que chacune de ces trois relations entraîne $f = O(\varphi)$ au voisinage de b, suivant $[a, b[$, ce qui montre que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. On peut donc envisager les deux applications de $[a, b[$ respectivement dans E et $\mathbb{R}_+$:

$$x \longmapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad x \longmapsto \int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les démonstrations étant similaires prouvons *iii*). Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $b' \in [a, b[$ tel que :

$$\forall t \in [b', b[\qquad \|f(t) - k\varphi(t)\| \leqslant \varepsilon \, \|k\| \, \varphi(t).$$

Il en résulte :

$$\forall x \in [b', b[\qquad \left\| \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t - k\int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \varepsilon\,\|k\| \int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \sim k\int_x^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

CAS PARTICULIER. — Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach $f : I \to E$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ deux applications localement intégrables, x_0 un point de I. On se propose de comparer au voisinage de x_0, suivant I, les applications intégrales

$$x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } x \longmapsto \int_{x_0}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, au voisinage de x_0 :

— la relation $f = O(\varphi)$ entraîne : $\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_{x_0}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$;

— la relation $f = o(\varphi)$ entraîne : $\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_{x_0}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$;

— la relation $f \sim k\varphi$, avec $k \in E\backslash\{0\}$, entraîne : $\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim k\int_{x_0}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

On applique le théorème I en prenant $x_0 = b$. $\square$

Application : intégration d'un développement limité. — THÉORÈME II. — **Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach $f : I \to E$ une application localement intégrable, x_0 un point de I. Si au voisinage de x_0 suivant I, f admet un développement limité à l'ordre n de la forme : $a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$ avec $(a_0, \dots, a_n) \in E^{n+1}$, alors l'application intégrale $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet, dans les mêmes conditions, le développement limité à l'ordre $n+1$:**

$$a_0(x-x_0) + \dots + a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

D'après *ii)*, la relation $f(x) - \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k = o(|x-x_0|^n)$ implique :

$$\int_{x_0}^x \left(f(t) - \sum_{k=0}^n a_k(t-x_0)^k\right)\mathrm{d}t = o(|x-x_0|^{n+1}). \qquad \square$$

CAS PARTICULIER. — Si on a, au voisinage de b, $f(x) \sim k|x-x_0|^\alpha$, alors

$$\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim k\frac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \text{pour } x > x_0,$$

$$\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim -k\frac{|x-x_0|^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \text{pour } x < x_0.$$

2° THÉORÈME. — **Soient E un espace de Banach, f et φ des applications localement intégrables de $[a, b[$ respectivement dans E et $\mathbb{R}_+$. On suppose que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Alors au voisinage de b suivant $[a, b[$:**

i) **la relation $f = O(\varphi)$ entraîne :** $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$;

ii) **la relation $f = o(\varphi)$ entraîne :** $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$;

iii) **la relation $f \sim k\varphi$, avec $k \in E\backslash\{0\}$, entraîne :** $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim k\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrons par exemple *ii*). Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe b', tel que $a \leqslant b' < b$ et que :

$$\forall\, t \in [b', b[\quad \|f(t)\| \leqslant \varepsilon/2 \cdot \varphi(t)$$

Soit $x \in [b', b[$:

$$\left\| \int_{b'}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \varepsilon/2 \cdot \int_{b'}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon/2 \cdot \int_{a}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, puisque $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, étant donné $\varepsilon/2$ il existe b'', $a \leqslant b'' < b$ tel que :

$$\forall\, x \in [b'', b[\qquad \left\| \int_{a}^{b'} f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \varepsilon/2 \cdot \int_{a}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in [b''', b[$ avec $b''' = \sup(b', b'')$ on a :

$$\left\| \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \varepsilon \int_{a}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$ □

7.2.5. Règles de convergence absolue

1° ***Les fonctions de référence.*** — On fait appel aux fonctions d'une échelle de comparaison (5.2.*1*), en commençant par les échelles de puissances.

LEMME I. — **Pour** $a \in \mathbb{R}_+^*$ **et** $\alpha \in \mathbb{R}$, **l'intégrale** $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ **converge si, et seulement si** $\alpha > 1$.

Pour $x \in [a, +\infty[$, $F(x) = \int_a^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) \text{ si } \alpha \neq 1\,; \quad \ln x - \ln a \quad \text{si} \quad \alpha = 1.$$ □

LEMME II. — **Pour** $-\infty < a < b < +\infty$ **et** $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ **converge si, et seulement si** $\alpha < 1$.

Pour $x \in [a, b[$, $F(x) = \int_a^x (b-t)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((b-a)^{1-\alpha} - (b-x)^{1-\alpha}\right) \qquad \text{si } \alpha \neq 1\,;$$

$$\ln(b-a) - \ln(b-x) \qquad \text{si } \alpha = 1.$$ □

2° ***Les règles de comparaison.*** — Dans la pratique, nous aurons le plus souvent affaire à des fonctions continues, et donc localement intégrables. Il suffira parfois d'utiliser le théorème du 7.2.*3*, 2°.

EXEMPLE. — *Pour* $\alpha > 1$, *l'intégrale* $\int_\pi^{+\infty} t^{-\alpha} \sin t\,\mathrm{d}t$ *est absolument convergente.*

Résulte de $|t^{-\alpha} \sin t| \leqslant t^{-\alpha}$

Il sera souvent commode d'utiliser les deux règles suivantes dites règles de l'ordre, qu'il est aisé d'établir à partir des propositions du 7.2.3.

Règle I. — **Soit f: $[a, +\infty[\rightarrow E$ une application localement intégrable.**

i) **S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in E \backslash \{0\}$ tels que, au voisinage de $+\infty$:**

$$f(t) \sim kt^{-\alpha}$$

alors l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est absolument convergente si $\alpha > 1$, et divergente si $\alpha \leqslant 1$.

ii) **S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $\alpha > 1$, tel que, au voisinage de $+\infty$:**

$$f(t) = O(t^{-\alpha})$$

alors l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est absolument convergente.

iii) **Dans le cas $E = \mathbb{R}$, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $\alpha \leqslant 1$, tel que :**

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} f(t) = +\infty \quad [\text{resp. } \lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} f(t) = -\infty]$$

alors l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est divergente.

Règle II. — **Soit f: $[a, b[\rightarrow E$, $(b < +\infty)$ une application localement intégrable.**

i) **S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in E \backslash \{0\}$ tels que, au voisinage de b :**

$$f(t) \sim k(b-t)^{-\alpha}$$

alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ est absolument convergente si $\alpha < 1$, et divergente si $\alpha \geqslant 1$.

ii) **S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $\alpha < 1$, tel que, au voisinage de b :**

$$f(t) = O((b-t)^{-\alpha})$$

alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ est absolument convergente.

iii) **Dans le cas $E = \mathbb{R}$, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $\alpha \geqslant 1$, tel que :**

$$\lim_{t \to b} (b-t)^{\alpha} f(t) = +\infty \quad [\text{resp. } \lim_{t \to b} (b-t)^{\alpha} f(t) = -\infty]$$

alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente.

Exemples. — a) *L'intégrale de Gauss* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ *est convergente.*

En effet on a ici : $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0.$ □

b) *Soient a un réel et $R = A/B$ une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ n'admettant aucun pôle réel sur $[a, +\infty[$. L'intégrale* $\int_a^{+\infty} R(t)\, dt$ *converge si et seulement si* $\deg(R) \leqslant -2$.

Notons $(-\alpha)$ le degré de R, qui est $\deg(A)-\deg(B)$. En désignant par k le quotient (non nul) des coefficients dominants de A et B nous avons $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha R(t) = k$. La condition de convergence est donc $\alpha > 1$, et d'ailleurs $\alpha \geqslant 2$, puisque α est un entier. □

c) *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}$ *est convergente.*

De $\sqrt{1-t^3} = \sqrt{1-t}.\sqrt{1+t+t^2}$ on déduit que, au voisinage de 1 :

$$(1-t^3)^{-1/2} \sim k(1-t)^{-1/2}, \text{ avec } k = 1/\sqrt{3}. \qquad \square$$

d) Plus généralement, soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, b un point de I, f une application continue de I dans $\mathbb{R}$ admettant b pour zéro unique, à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$; ainsi, au voisinage de b, les fonctions f et $t \longmapsto |t-b|^p$ sont semblables. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions $|f|^{-\alpha}$ et $t \longmapsto |t-b|^{-\alpha p}$ sont semblables et leurs intégrales sur $[a, b[$ ou sur $]b, a]$, $a \in I\backslash\{b\}$ sont de même nature (par application de 7.2.3).

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente si, et seulement si $\alpha < 1/p$.

Remarque. — Si l'application localement intégrable $f : [a, +\infty[\longrightarrow E$ vérifie

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = k,$$

avec $k \neq 0$, l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ diverge (ici $\alpha = 0$).

Il ne faudrait pas en conclure que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ est une condition nécessaire de convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. C'est ainsi que la fonction « localement en escalier » $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\begin{cases} f(t) = 2^n & \text{si} \quad t \in I_n, \quad \text{avec} \quad I_n = \left[n, n+\dfrac{1}{2^{2n}}\right[, \quad (n \in \mathbb{N}) \\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \end{cases}$$

vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{E(x)} \frac{1}{2^k} < 2$. Comme f est positive, son intégrale sur $[0, +\infty[$ converge.

3° ***Autres fonctions de référence.*** — On peut avoir à utiliser une échelle de comparaison plus fine que l'échelle des puissances. Etablissons, par exemple :

Lemme I. — *Pour* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, *l'intégrale de Bertrand* $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta t}$ *converge si, et seulement si* : $(\alpha > 1) \vee ((\alpha = 1) \wedge (\beta > 1))$.

La fonction $f(t) = t^{-\alpha}\ln^{-\beta} t$ vérifie : $\forall t \geqslant e$, $f(t) > 0$. Posons $\varphi(t) = t^{\frac{1+\alpha}{2}} f(t)$.

— Si $\alpha > 1$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$ et donc : $f(t) = o(t^{-\frac{1+\alpha}{2}})$. Comme $\dfrac{1+\alpha}{2} > 1$, l'intégrale converge (règle I *ii*) du 2°).

— Si $\alpha < 1$, on a $\dfrac{1+\alpha}{2} < 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{1+\alpha}{2}} f(t) = +\infty$.

L'intégrale diverge (règle *I*, *iii*) du 2).

— Dans le cas $\alpha = 1$, étudions directement $F(x) = \displaystyle\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta t}$.

On a :

$$F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta} \text{ et donc : } F(x) = \frac{1}{1-\beta}(\ln^{1-\beta} x - 1) \text{ si } \beta \neq 1,$$

et $F(x) = \ln(\ln x)$ si $\beta = 1$. Dans ce cas, l'intégrale converge si, et seulement si $\beta > 1$.

LEMME II. — *Pour* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, *l'intégrale de Bertrand* $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{dt}{t^\lambda |\ln t|^\mu}$, *converge si, et seulement si* : $(\lambda < 1) \vee ((\lambda = 1) \wedge (\mu > 1))$.

Démonstration laissée au lecteur qui pourra soit raisonner comme ci-dessus, soit *se ramener au lemme I par changement de variable, après avoir étudié 7.2.8, 2°*.

Nous aurons l'occasion de revenir sur les intégrales de Bertrand au IV 1.6.3.

7.2.6. Intégrales semi-convergentes

1° DÉFINITION. — **Une intégrale impropre convergente, mais non absolument convergente est dite semi-convergente.**

2° ***Règle d'Abel.*** — Nous allons établir une règle qui permet de montrer qu'il existe des intégrales semi-convergentes. Elle est d'un emploi délicat, et *il ne faut l'essayer que lorsque les critères que nous connaissons déjà sont en défaut.*

PROPOSITION. — **Soient** $f: [a, b[\to \mathbb{R}$ **et** $g: [a, b[\to \mathbb{R}$ **des applications localement intégrables vérifiant les deux conditions :**

i) f **est décroissante et admet** 0 **pour limite au point** b (ce qui implique $f \geqslant 0$) ;

ii) **Il existe** $k \in \mathbb{R}_+^*$ **tel que :**

$$\forall (u, v) \in [a, b[\times [a, b[\qquad \left| \int_u^v g(t)\, dt \right| \leqslant k.$$

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ **est convergente.**

D'après la seconde formule de la moyenne (1) (6.3.6), pour tout $(x', x'') \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant x' < x'' < b$, il existe $\xi \in [x', x'']$ tel que :

$$\int_{x'}^{x''} f(t)\, g(t)\, dt = f(x') \int_{x'}^{\xi} g(t)\, dt$$

et donc, d'après *ii)* :

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t) g(t)\, dt \right| \leqslant k f(x'). \tag{1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après *i)*, il existe $c \in [a, b[$ tel que, pour tout $t \in [c, b[$:

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \varepsilon/k \tag{2}$$

De (1) et (2) on déduit :

$$\forall (x', x'') \in [c, b[\times [c, b[\qquad \left| \int_{x'}^{x''} f(t) g(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy (7.2.2, 2°) est satisfait. □

(1) On notera que l'on en connaît une démonstration simple lorsque les hypothèses sont renforcées par : f est de classe C^1, g est continue.

COROLLAIRE. — *A condition de remplacer dans ii) la valeur absolue par la norme, la proposition reste vraie si g prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}^m$, *et en particulier dans* $\mathbb{C}$.

Ecrivons, dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$: $g(t) = \sum_k g_k(t)e_k$.

Si le couple (f, g) vérifie $i)$ et $ii)$, il en est de même de chacun des couples (f, g_k), $k \in \mathbb{N}_m$. □

REMARQUES. — *a*) Il est bien évident que la proposition reste valable si la condition *i*) n'est vérifiée que sur un sous-intervalle $[c, b[$ de $[a, b[$, la convergence de l'intégrale de fg sur $[c, b[$ assurant sa convergence sur $[a, b[$.

b) On peut éviter le recours à la seconde formule de la moyenne dans la démonstration de la proposition, à condition de renforcer les hypothèses *en se limitant au cas où g est continue, f de classe* C^1, *l'intégrale de* $|f'|$ *sur* $[a, b[$ *étant convergente*, et en remplaçant *i*) par la condition moins forte : *i'*) *f admet* 0 *pour limite au point b.*

En effet, soit alors x' un point de $[a, b[$. Posons $h(x) = \int_{x'}^{x} g(t)\,dt$. La fonction h est de classe C^1 sur $[a, b[$. Pour tout $x'' \in [x', b[$, nous avons, en intégrant par parties et en utilisant $h(x') = 0$:

$$\int_{x'}^{x''} f(t)g(t)\,dt = \int_{x'}^{x''} f(t)h'(t)\,dt = f(x'')h(x'') - \int_{x'}^{x''} f'(t)h(t)\,dt.$$

Or, pour tout $x \in [a, b[$: $|h(x)| \leqslant k$. Ainsi, pour tout $(x', x'') \in ([a, b[)^2$ tel que $x' \leqslant x''$ on a :

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant k|f(x'')| + k\int_{x'}^{x''} |f'(t)|\,dt.$$

Compte tenu de $\lim_{t\to b,\, t<b} f(t) = 0$ et de la convergence de $\int_a^b |f'(t)|\,dt$, on voit que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ vérifie le critère de Cauchy.

3° ***Pratique.*** — On applique le plus souvent la règle d'Abel en adoptant pour g l'application $t \longmapsto \exp(i\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$; c'est légitime puisqu'il s'agit d'une application continue telle que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\int_u^v g(t)\,dt\right| = \left|\frac{\exp(i\lambda v) - \exp(i\lambda u)}{i\lambda}\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|}.$$

Voici des exemples importants.

a) *Etude de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \exp(i\lambda t)\,dt, \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}^*)$.

1er CAS : $\alpha > 1$. Il suffit d'utiliser $|t^{-\alpha}\exp(i\lambda t)| = t^{-\alpha}$ pour constater que l'intégrale est absolument convergente.

2e CAS : $0 < \alpha \leqslant 1$. L'intégrale n'est pas absolument convergente. La fonction $f : t \longmapsto t^{-\alpha}$ étant décroissante sur $[1, +\infty[$ et vérifiant $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, la règle d'Abel s'applique. L'intégrale est donc semi-convergente.

3e CAS : $\alpha \leqslant 0$. Nous verrons en b) que l'intégrale est divergente.

b) *Etude des intégrales* $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\cos(\lambda t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\sin(\lambda t)\,dt$. Il s'agit des parties réelle et imaginaire de l'intégrale étudiée en a). Nous supposerons $\lambda > 0$.

1er CAS : $\alpha > 1$. Les deux intégrales sont *absolument convergentes.*

2e CAS : $0 < \alpha \leqslant 1$. Les deux intégrales sont convergentes d'après a), mais on ne peut pas affirmer *a priori* qu'elles ne sont que *semi-convergentes.*

Pour montrer qu'il en est bien ainsi, remarquons que les intégrales sur $[1, +\infty[$ de $t \longmapsto t^{-\alpha}$ et $t \longmapsto t^{-\alpha} \cos(2\lambda t)$ sont respectivement divergente et convergente ; celles de leur demi-somme $t \longmapsto t^{-\alpha} \cos^2(\lambda t)$ et de leur demi-différence $t \longmapsto t^{-\alpha} \sin^2(\lambda t)$ sont donc divergentes.

Comme $|\cos(\lambda t)| \geqslant \cos^2(\lambda t)$ et $|\sin(\lambda t)| \geqslant \sin^2(\lambda t)$, les intégrales de $t \longmapsto t^{-\alpha}|\cos(\lambda t)|$ et $t \longmapsto t^{-\alpha}|\sin(\lambda t)|$ sont divergentes. □

3e CAS : $\alpha \leqslant 0$. Nous allons montrer que la seconde intégrale est divergente ; le même raisonnement s'appliquera à la première ; il en résultera que l'intégrale étudiée en a) est divergente lorsque $\alpha \leqslant 0$.

Posons $a_n = \int_{n\pi/\lambda}^{(n+1)\pi/\lambda} t^{-\alpha} \sin(\lambda t)\, dt$. En remarquant que $t \longmapsto \sin(\lambda t)$ ne change pas de signe entre les bornes d'intégration, on constate que $|a_n|$ est l'intégrale de $t \longmapsto t^{-\alpha}|\sin(\lambda t)|$, et donc que $|a_n|$ majore l'intégrale de $t \longmapsto (n\pi/\lambda)^{-\alpha}|\sin(\lambda t)|$, elle même égale à $(n\pi/\lambda)^{-\alpha} 2/\lambda$.

La condition de convergence de Cauchy n'est pas satisfaite. □

REMARQUE. — Posons $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$, $\theta(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t}$ et $\psi(t) = \varphi(t) + \theta(t)$. Les intégrales de φ et θ sur $[1, +\infty[$ sont respectivement convergente et divergente d'après ce qui précède. L'intégrale de ψ est donc divergente. *Nous avons ainsi un exemple de deux fonctions φ et ψ, équivalentes au voisinage de $+\infty$, dont les intégrales sur $[1, +\infty[$ sont de nature différente.*

c) *Etude de l'intégrale* $\int_a^{+\infty} R(t) \sin t\, dt$, *où $R = A/B$ est une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ n'admettant aucun pôle sur $[a, +\infty[$*

— Si $\deg(R) \leqslant -2$, l'intégrale est absolument convergente (*cf.* 7.2.5, 2°).

— Si $\deg(R) = -1$, au voisinage de $+\infty$, on a $|R(t) \sin t| \sim k \left|\dfrac{\sin t}{t}\right|$ et l'intégrale de la fonction $t \longmapsto |R(t) \sin t|$ diverge.

On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} R(t) = 0$. On constate que, c désignant le plus grand zéro du polynôme $A'B - AB'$, la fonction $t \longmapsto R(t)$ est monotone sur $[c, +\infty[$. En écrivant, si nécessaire $R(t) \sin t = -R(t) \sin(-t)$, on constate que la règle d'Abel est satisfaite et que l'intégrale est semi-convergente.

— Si $\deg(R) \geqslant 0$, on constate que le critère de Cauchy n'est pas satisfait et que l'intégrale diverge.

7.2.7. Intégrales plusieurs fois impropres

1° ***Notations.*** — On donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ de la forme $]b', b[$ avec $-\infty \leqslant b' < b \leqslant +\infty$, et une application localement intégrable f de I dans un espace de Banach E.

On vérifie que, s'il existe $a \in I$ tel que les intégrales impropres de f sur $]b', a]$ et $[a, b[$ convergent, alors, pour tout $c \in I$, les intégrales impropres de f sur $]b', c]$ et $[c, b[$ convergent et :

$$\int_{b'}^{c} f(t)\, dt + \int_{c}^{b} f(t)\, dt = \int_{b'}^{a} f(t)\, dt + \int_{a}^{b} f(t)\, dt.$$

On choisit arbitrairement $a \in I$ et on introduit les applications

$$F : I \to E \quad x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,; \quad G : I \to E \quad y \longmapsto \int_y^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Phi : I \times I \to E \qquad (y, x) \longmapsto \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(y) + F(x)$$

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Avec les notations précédentes, les deux assertions suivantes sont équivalentes :**

i) **Les intégrales impropres de** f **sur** $]b', a]$ **et sur** $[a, b[$ **convergent ;**

ii) **L'application** Φ **admet une limite au point** (b', b)**, considéré comme point de** $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ **muni de la topologie produit.**

Lorsqu'elles sont vraies, la limite de Φ **est égale à la somme des deux intégrales impropres. On dit alors que l'intégrale** *doublement impropre* $\int_{b'}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge, et on lui attribue la valeur :**

$$\int_{b'}^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{b'}^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

(indépendante de a**).**

— Supposons que *i*) est vraie. Alors :

$$\lim_{x \to b} F(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{y \to b'} G(y) = \int_{b'}^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après $\Phi(y, x) = G(y) + F(x)$, il existe donc :

$$\lim_{(y,\,x) \to (b',\,b)} \Phi(y, x) = \int_{b'}^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— Inversement supposons qu'existe $\lim\limits_{(y,\,x) \to (b',\,b)} \Phi(y, x) = l$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $(c', c) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant $b' < c' < c < b$, tel que :

$$\forall (y, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (b' < y \leqslant c' < c \leqslant x < b) \Longrightarrow (\|\Phi(y, x) - l\| \leqslant \varepsilon/2)$$

On en déduit :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (c \leqslant u < v < b) \Longrightarrow (\|\Phi(c', v) - \Phi(c', u)\| \leqslant \varepsilon).$$

Comme $\Phi(c', v) - \Phi(c', u)$ est aussi $\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$, il résulte du critère de Cauchy que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Il en est de même pour $\int_{b'}^a f(t)\,\mathrm{d}t$. ☐

Remarque. — Soit θ une application de I dans I admettant la limite b' au point b. Considérons :

$$H : I \to E \quad x \longmapsto \int_{\theta(x)}^{x} f(t)\, dt.$$

Si elle existe, l'intégrale de f sur $]b', b[$ est la limite de H au point b. Mais H peut admettre une limite au point b sans que l'intégrale existe. C'est ainsi que $\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} t\, dt = 0$, alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dt$ diverge.

2° ***Généralisation.*** — *Soit $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille croissante de points de $\overline{\mathbb{R}}$, et f une application localement intégrable de $]b_1, b_n[\setminus\{b_2, ..., b_{n-1}\}$ dans un espace de Banach E.*

Si chacune des intégrales impropres $\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(t)\, dt$ converge (resp. *converge absolument*), *on dit que l'intégrale n fois impropre $\int_{b_1}^{b_n}$ converge* (resp. *converge absolument*) *et on lui attribue la valeur $\sum_{k=1}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(t)\, dt$.*

Exemple. — L'intégrale $\int_1^n \frac{dt}{\sqrt[3]{(t-1)(t-2)\dots(t-n)}}$ est absolument convergente. En effet, au voisinage de tout $k \in \mathbb{N}_n$ on a : $|f(t)| = O(|t-k|^{-1/3})$.

7.2.8. Calcul des intégrales impropres

E désigne encore un espace de Banach.

1° ***Recours à une primitive.*** — Proposition I. — **Soit f: $]b', b[\to E$, avec $-\infty \leqslant b' < b \leqslant +\infty$, une application localement intégrable admettant une primitive F: $]b', b[\to E$. L'intégrale $\int_{b'}^{b} f(t)\, dt$ converge si, et seulement si F admet une limite en chacun des points b' et b. On a alors :**

$$\int_{b'}^{b} f(t)\, dt = \lim_{t \to b} F(t) - \lim_{t \to b'} F(t), \quad \text{(ce qui s'écrit } [F(t)]_{b'}^{b}\text{)}$$

Simple conséquence de la définition de la convergence d'une intégrale. □

On en déduit immédiatement :

Proposition II. — **Soient $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, $(n \geqslant 2)$, une famille strictement croissante de points de $\mathbb{R}$, et f une application localement intégrable de $B =]b_1, b_n[\setminus\{b_2, ..., b_{n-1}\}$ dans E. S'il existe une application continue**

$F : [b_1, b_n] \to E$ admettant $f(t)$ pour dérivée en tout point de B, alors l'intégrale n fois impropre $\int_{b_1}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et vaut $F(b_n) - F(b_1)$.

EXEMPLES. — *a*) $\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = [\text{Arc sin } t]_{-1}^{+1} = \pi$.

b) Il ne faut pas écrire $\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln |t|]_{-1}^{+1} = 0$, car la fonction $t \longmapsto \ln |t|$ n'est pas définie au point 0. En fait $\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est une intégrale divergente.

2° ***Changement de variable.*** — THÉORÈME. — **Soient φ un C^1-difféomorphisme croissant d'un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ sur un intervalle ouvert $]a, b[$, et f : $]a, b[\to E$ une application continue ; $(f \circ \varphi) . \varphi' :]\alpha, \beta[\to E$ est ainsi une application continue. Dans ces conditions, l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge si, et seulement si celle de $(f \circ \varphi) . \varphi'$ sur $]\alpha, \beta[$ converge, et alors :**

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $(\xi, \eta) \in (]\alpha, \beta[)^2$ on a (**6**.7.*2*, 2°) :

$$\int_\xi^\eta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\xi)}^{\varphi(\eta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En désignant par ψ la bijection réciproque de φ, on a donc, pour tout $(u, v) \in (]a, b[)^2$:

$$\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(u)}^{\psi(v)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où l'équivalence de l'existence des limites :

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\alpha,\beta)} \int_\xi^\eta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{(u,v)\to(a,b)} \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Compte tenu de 7.2.*7*, 1°, le théorème en résulte. Il reste valable (formule comprise) si on remplace *croissant* par *décroissant*, à condition de remplacer $]a, b[$ par $]b, a[$, de façon à avoir encore : $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

REMARQUES. — *a*) Une intégrale sur un intervalle borné peut parfois être remplacée par une intégrale sur un intervalle non borné, et inversement.

b) Si l'une des intégrales est absolument convergente, il en est de même de l'autre et on a :

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

ε étant $+1$ ou -1 selon que φ est croissante ou décroissante.

EXEMPLES. — a) *L'intégrale* $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\,\mathrm{d}t$, $(a < b)$, *converge et vaut* π.

Le changement de variable $t = \dfrac{b+a}{2} + u\,\dfrac{b-a}{2}$ ramène à $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$. □

b) *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(it^2)\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

En effet sa nature est la même que celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(it^2)\,\mathrm{d}t$, et donc (après le changement de variable $t = \sqrt{u}$), celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(iu)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$, (*cf.* 7.2.6, 3°).

On en déduit que les intégrales de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

3° ***Intégration par parties.*** — Soient $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, f et g deux applications continûment dérivables de $[a, b[$ dans $\mathbb{K}$, ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). D'après **6**.7.2, 4°, on a, pour tout $x \in [a, b[$

$$\int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = (f(x)g(x) - f(a)g(a)) - \int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dispose ainsi d'une égalité faisant intervenir trois applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{K}$. Si deux d'entre elles ont une limite lorsque x tend vers b, il en est de même de la troisième. En particulier s'il existe $B = \lim\limits_{x \to b} f(x)g(x)$, (avec $B \in \mathbb{R}$ dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), alors les intégrales sur $[a, b[$ de fg' et de $f'g$ sont de même nature, et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = B - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Remarques. — *a*) On peut avoir une intégrale absolument convergente au premier membre de (1) et une intégrale semi-convergente au second membre. Le lecteur vérifiera qu'il en est ainsi pour $[a, b[= [\pi, +\infty[$, $f(t) = e^{it}$, $g(t) = 1/\sqrt{t}$.

b) Dans le cas $b \in \mathbb{R}$, (1) peut parfois ramener le calcul d'une intégrale impropre à celui d'une intégrale de Riemann, et inversement.

Exemples. — a) *Etude de* $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$, *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$. La convergence ne pose pas de difficulté, la fonction considérée étant équivalente à $t \longmapsto t^{x-1}$ au voisinage de 0, et négligeable devant $t \longmapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$.

Posons $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = t^x/x$ et remarquons :

$$\lim_{t\to 0} f(t)\,g(t) = 0\,; \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t)\,g(t) = 0.$$

D'où, grâce à une intégration par parties :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1).$$

Compte tenu de $\Gamma(1) = 1$, on en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad \Gamma(n) = (n-1)\,!$$

Le lecteur pourra étudier $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$, $z \in \mathbb{C}$, et constater que Γ est définie sur le demi-plan $\mathcal{R}e(z) > 0$.

b) *Etude de l'intégrale* $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\, dt$.

La fonction $t \longmapsto \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est continue, à valeurs négatives; elle est équivalente à $t \longmapsto \ln t$ au voisinage de 0 et à $t \longmapsto -\sqrt{1-t}$ au voisinage de 1. On en déduit la convergence de l'intégrale, dont on désigne la valeur par I. Une intégration par parties donne (en adoptant $t \longmapsto 2(1-\sqrt{1-t})$ pour primitive de $t \longmapsto (1-t)^{-1/2}$, ce qui fournit $\lim\limits_{t \to 0+} (1-\sqrt{1-t}) \ln t = 0$).

$$\int_y^x \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\, dt = [2(1-\sqrt{1-t}) \ln t]_y^x - 2 \int_y^x \frac{1-\sqrt{1-t}}{t}\, dt.$$

D'où :
$$I = \lim_{y \to 0+} G(y) \quad \text{avec} \quad G(y) = 2 \int_y^1 \frac{-1+\sqrt{1-t}}{t}\, dt.$$

$$\text{et donc : } I = 2 \int_0^1 \frac{-1+\sqrt{1-t}}{t}\, dt.$$

Le changement de variable $u = \sqrt{1-t}$ fournit :

$$I = -4 \int_0^1 \frac{u}{1+u}\, du.$$

Finalement : $I = -4(1 - \text{Log}\, 2)$.

c) *Justification de l'égalité :* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$.

La convergence de la première intégrale a été vue, celle de la seconde est triviale. Soit $(\varepsilon, \xi) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Une intégration par partie, dans laquelle on adopte $t \longmapsto 1 - \cos t$ pour primitive de $\sin t$, donne :

$$\int_\varepsilon^\xi \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon^\xi + \int_\varepsilon^\xi \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt.$$

La proposition résulte de $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1-\cos \varepsilon}{\varepsilon} = 0$ et $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \frac{1-\cos \xi}{\xi} = 0$.

4° Terminons par une remarque importante : *l'intégrale impropre de $f+g$ peut converger, alors que les intégrales de f et g divergent.* Il en résulte que des précautions s'imposent lorsque des intégrales impropres apparaissent en cours de calcul.

EXEMPLE. — Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1-t^2}}\, dt$.

Il s'agit de l'intégrale de Riemann d'une application continue sur $[0, 1]$.

La restriction de cette application à $]0, 1]$ s'écrivant $t \longmapsto \frac{\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}}{2t^2}$, on serait tenté d'écrire :

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{2t^2}\, dt - \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2t^2}\, dt$$

ce qui introduit deux intégrales impropres divergentes.

En revanche, on a le droit d'écrire :

$$I = \lim_{x\to 0+} G(x), \qquad \text{avec} \qquad G(x) = \int_x^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{2t^2}\,dt - \int_x^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{2t^2}\,dt.$$

En intégrant par parties :

$$G(x) = \left[-\frac{1}{2t}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2t}\sqrt{1-t^2} \right]_x^1 + \frac{1}{2}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt + \frac{1}{2}\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

En utilisant : $$\frac{\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1+t^2}}{2t} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1+t^2}}$$

on obtient, tous calculs faits :

$$I = -1/\sqrt{2} + 1/2\cdot \ln(1+\sqrt{2}) + \pi/4.$$

7.3. INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Cette question n'est citée ici que pour mémoire, car nous ne sommes pas encore en mesure de la traiter. Elle sera exposée en deux temps :

— au **8**.1.*8*, en ce qui concerne les intégrales sur un compact ;

— au IV. **2**.3., en ce qui concerne les intégrales impropres.

EXERCICES

Calcul des primitives

7.01. — Pour chacune des fonctions suivantes, trouver les familles de fonctions primitives, en précisant pour chaque famille son intervalle de définition :

$$\frac{1}{t^7-1}; \quad \frac{1}{(t^4-1)^2}; \quad \frac{2t-1}{t(t+1)^2(t^2+t+1)^2}; \quad \frac{1}{(t+1)^7-t^7-1}; \quad \frac{t^4+t^2+1}{(t^2+t+1)^3};$$

$$\frac{t^2}{t^4-2t^2\cos\alpha+1}; \quad \frac{t^4+1}{(t-1)(t-2)(t-3)}; \quad \frac{1}{(t^2+2)(t^4+1)}; \quad \frac{1}{t^8+t^4+1};$$

$$\frac{\sin t}{\sin^2 t-\cos t}; \quad \frac{\sin t}{\cos^2 t+\operatorname{tg}^2 t}; \quad \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 t}; \quad \frac{1}{\cos^n t}; \quad \frac{1}{\operatorname{ch}^n t}; \quad \operatorname{tg}^n t;$$

$$\frac{\sin^3 t}{1+\cos t}; \quad \frac{\sin t}{\sin(t+\pi/3)\sin(t-\pi/12)}; \quad \frac{1}{\cos t-\cos 5t}; \quad \frac{t^2}{(\cos t+t\sin t)^2};$$

$$\sqrt[3]{\frac{t-1}{t+1}}; \quad \frac{1}{1-t^2+2\sqrt{1-t^2}}; \quad \frac{t}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}; \quad \frac{\sqrt{1+t^3}}{t^4}; \quad \frac{\sqrt{t+1}-\sqrt[3]{t+1}}{\sqrt{t+1}+\sqrt[3]{t+1}};$$

$$(t+1)\sqrt{\frac{t-1}{t}}; \quad \frac{\sqrt[3]{1+t^3}}{t}; \quad \frac{t}{\sqrt{9+4t^4}}; \quad \frac{t^2}{(2-t^3)\sqrt{1-t^3}}; \quad \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}};$$

$t\,(\text{Arc tg}\, t)^2$; $\quad$ $\text{Arc tg}\, t$; $\quad$ $t^2 \sin t \cos^2 t$; $\quad$ $\text{Arc tg}\sqrt{\dfrac{1+t}{3+t}}$; $\quad$ $\sqrt{1+t}\,\ln t$;

$\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^4}\,\text{Arc sin}\, t$; $\quad$ $\dfrac{t^3\,\text{Arc cos}\, t}{\sqrt{1-t^2}}$; $\quad$ $\dfrac{t^2+2t-1}{(t^2+1)^2}\ln t$; $\quad$ $\dfrac{(1+t^2)\,\text{Arc tg}\,(t+1/t)}{(t^2-1)^2}$;

$\dfrac{1}{\sqrt{4-(e^t+1)^2}}$; $\quad$ $3^{\sqrt{2t+1}}$; $\quad$ $2^{-t}\,\text{th}\,(2^{1-t})$; $\quad$ $e^{t\sqrt{2}}\,\text{tg}^3\, t$.

7.02. — Déterminer les constantes a, b, c pour que les primitives des fonctions suivantes soient des fonctions rationnelles :

$$\left(\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t-2}+\frac{c}{t-3}\right)^2 ; \qquad \frac{at^2+bt+c}{t^3(t-1)^2} ; \qquad \frac{(t-a)(t-b)}{t^2(t-c)^2}.$$

7.03. — On considère la fonction polynôme de la variable complexe :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ (a_k \in \mathbb{C}).$$

On pose : $M(r) = \sup\limits_{\theta\in[0,\,2\pi]} |P(re^{i\theta})|$.

a) Calculer l'intégrale :

$$I_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{i\theta})\,r^{-k}\,\mathrm{e}^{-ki\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

En déduire : $|a_k| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^k}$.

b) Montrer que, s'il existe $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tel que $|a_k| = \dfrac{M(r)}{r^k}$, alors $P(z) = a_k z^k$.

7.04. — On pose : $\quad I_{p,\,q}(x) = \displaystyle\int_0^x t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$, avec $x \in\,]0, 1[$ et $p > 1$.

a) Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que :

$$\forall\, x \in\,]0, 1[\quad aI_{p,\,q}(x)+bI_{p-1,\,q-1}(x) = x^p(1-x)^q(cx-q)$$

b) Appliquer au calcul de $\displaystyle\int_0^x \sqrt[3]{\frac{t^5}{(1-t)^{11}}}\,\mathrm{d}t$.

7.05. — On pose : $J_{m,\,n} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x$, avec m et $n \in \mathbb{N}$.

Trouver les relations de récurrence liant :

① $J_{m,\,n}$ et $J_{m,\,n-2}$ pour $n \geqslant 2$

② $J_{m,\,n}$ et $J_{m-2,\,n}$ pour $m \geqslant 2$

En déduire $J_{m,\,n}$.

7.06. — Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue telle qu'il existe

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}^*.$$

Etudier la suite de terme général

$$a_n = \frac{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\sum_{k=1}^{n} f(k)}.$$

On montrera que a_n est défini pour n assez grand et que $\lim a_n = 1$.

7.07. — Calculer $F(x) = \int_0^1 \operatorname{Log}(1+xt^2)\,\mathrm{d}t$, après avoir déterminé Déf (F).

Intégrales impropres

7.08. — Existence et calcul des intégrales :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\cos\alpha \cos t + 1} \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch}\alpha}.$$

7.09. — Calculer les intégrales (après en avoir vérifié l'existence) :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2}\,\mathrm{d}t \,; \quad \int_{\pi/9}^{\pi/6} \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{\cos 2t}}\,\mathrm{d}t \,; \quad \int_0^{\pi/6} \frac{\sin t}{\cos^3 t \sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 t)^3}}\,\mathrm{d}t \,;$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos^2 t + \cot^2 t}\,\mathrm{d}t \,; \quad \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \cos 3t \sqrt{\cos 2t}\,\mathrm{d}t \,; \quad \int_a^{2a} \frac{a^2 t + 2t^3}{\sqrt{t^4 - a^4}}\,\mathrm{d}t \,;$$

$$\int_0^1 \frac{(1-3t^2)\operatorname{Arc\,sin}\dfrac{1-t}{1+t}}{\sqrt{t(1-t^2)}}\,\mathrm{d}t \,; \quad \int_0^{\pi/2} t\,\frac{\sin^3 t + \cos^3 t}{\sin^4 t + \cos^4 t}\,\mathrm{d}t \,; \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 2t \ln(\operatorname{tg} t)\,\mathrm{d}t;$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \ln\frac{1+t}{1-t}\,\mathrm{d}t; \quad \int_0^1 \frac{t \ln t}{(1-t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t; \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{(a+\cos t)(b+\cos t)}\,\mathrm{d}t \,;$$

$$\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t; \quad \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t\sqrt{-t^4+3t^2-2}}\,\mathrm{d}t \,; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}\,\mathrm{d}t \,;$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \,; \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^n+t^{2n}}}\,\mathrm{d}t \,; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+\sqrt{t^2+1})^n}\,\mathrm{d}t \,;$$

$$\int_{-1}^{+1} t^n \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t \ (n \in \mathbb{N}) \,; \quad \int_1^{+\infty} \left[2 + (2\alpha-1) \ln\frac{t^2}{t^2+t+1}\right]\mathrm{d}t.$$

7.10. — Soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}\,\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$. Existence ; calcul de I_0 ; relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n.

7.11. — Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer : $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

b) On suppose en outre que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Le résultat subsiste-t-il si f n'est que continue ?

7.12. — *a*) Etablir l'existence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

b) Soit f l'application de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 < x \leqslant \pi, \quad f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continûment dérivable.

c) Soit n un entier positif ou nul. On considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que I_n est indépendant de n et calculer I_n.

d) Montrer que si φ est intégrable sur $[0, \pi]$, alors l'intégrale

$$J_n = \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x$$

admet pour limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

e) Déterminer alors $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

7.13. — Limite éventuelle, pour x tendant vers 0, de $F(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

7.14. — *a*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}] \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

b) En utilisant les intégrales de Wallis en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

7.15. — Pour $|\alpha| < 1$, calculer l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2}$.

En déduire la valeur de

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\pi \frac{2(\alpha - \cos t)}{1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2}\, dt \quad \text{et de} \quad F(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2)\, dt.$$

(Cette dernière intégrale a été calculée au 6.2.3, 5°).

7.16. — On pose $r_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n+2} t\, dt \quad (n \in \mathbb{N})$.

a) Montrer : $r_{n+1} + r_n = 1/(2n+3)$. En déduire que, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$r_n \sim \frac{1}{4n}.$$

b) Exprimer $s_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$ en fonction de r_n et en déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \to +\infty} s_n$.

7.17. — On pose $f_n(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^n \sqrt{t^2 - 1}}$ et $I_n = f_n(+\infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Etablir une relation de récurrence entre f_n et f_{n+2}

b) Existence et calcul de $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

7.18. — *a*) Montrer qu'il existe une application continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t}\, t^{-1}\, dt.$$

b) Montrer que f admet $x \longmapsto x - 1!x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!x^n$ pour développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

Il sera commode d'utiliser les fonctions

$$f_n : x \longmapsto e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t}\, t^{n-1}\, dt, \ (n \in \mathbb{N}).$$

7.19. — Etudier la convergence de :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt\,; \quad \int_0^{+\infty} t\, |\cos t|^5\, dt\,; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}}\, dt\,;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2 |\sin t|)^{3/2}}\, dt\,; \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^{5/2}}\, dt.$$

7.20. — Soit f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, de classe C^2 telle que $f(0) = f(1) = 0$ et : $(\forall t \in]0, 1[\;\; f(t) > 0)$. On pose $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et on suppose $I = \int_0^1 \frac{|f''(t)|}{f(t)} \, dt$ convergente. Montrer :

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \qquad I > \frac{1}{M} |f'(x) - f'(y)|.$$

En déduire $I > 4$.

7.21. — Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ localement intégrable et α et β deux réels strictement positifs. On pose :

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha t) - f(\beta t)}{t} \, dt.$$

a) Montrer la convergence de $J(\alpha, \beta)$ et la calculer dans chacun des cas suivants :

i) Il existe $a = \lim_{t \to 0} f(t)$ et $b = \lim_{t \to +\infty} f(t)$.

ii) Il existe des réels m et M tels que les intégrales impropres :

$$\int_0^1 \frac{f(t) - m}{t} \, dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{f(t) - M}{t} \, dt$$

soient convergentes.

iii) Il existe $a = \lim_{t \to 0} f(t)$ et il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leqslant M.$$

b) Appliquer ces résultats à : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\text{Arc tg } 2t - \text{Arc tg } t) \frac{dt}{t}$.

7.22. — Soit f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que les intégrales de f^2 et de f''^2 sur $\mathbb{R}_+$ convergent. Montrer que l'intégrale de f'^2 sur $\mathbb{R}_+$ converge.

7.23. — Soit f : $]0, 1[\to \mathbb{R}$, localement intégrable, telle que $\int_0^1 f(t) \, dt$ existe. On suppose en outre qu'il existe a et b, avec $0 < a < b < 1$, tels que les restrictions de f à $]0, a]$ et à $[b, 1[$ soient monotones.

a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) \, dt$.

b) Montrer que, pour $\alpha > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha - 1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

7.24. — *Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, dt$ existe et vaut $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$. *

7.25. — *Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ existe, et vaut $\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$.*

7.26. — *a*) Prouver l'existence des intégrales :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt; \qquad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,dt.$$

b) Etablir une relation entre I et J et en déduire leur valeur.

c) On pose $S_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. Montrer : $S_n = 2^{n-1} S_{2n}$.

En déduire un second calcul de I.

7.27. — On donne $a \in \mathbb{R}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose :

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{a}{x}} \int_0^a e^{\frac{t}{x}} P(t)\,dt.$$

La fonction f admet-elle une limite (resp. une limite à droite ; resp. une limite à gauche) au point 0 ? Comparer la limite éventuelle à $P(a)$.

7.28. — Trouver les primitives de $t \longmapsto \frac{1}{t-a}$, où $a \in \mathbb{C}$. Comparer avec les solutions de $e^z = t-a$ ($z \in \mathbb{C}$).

7.29. — *Théorème des résidus.* — Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, sans pôle réel, de degré inférieur ou égal à -2. On désigne par P_+ l'ensemble de ses pôles dont la partie imaginaire est strictement positive. Pour tout pôle a, on note $\mathrm{Res}_F(a)$ le résidu de F en a (coefficient de $\frac{1}{X-a}$ dans la décomposition en éléments simples). Vérifier que $\Sigma\,\mathrm{Res}_F(a) = 0$, et en déduire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,dt = 2i\pi \sum_{a \in P_+} \mathrm{Res}_F(a).$$

Intégrales dépendant d'un paramètre. — *Les exercices qui suivent admettent une solution « élémentaire », ne faisant pas appel à la théorie développée au* **8**.1.*8. et au* IV.**2**.3. (*à laquelle on pourra éventuellement se reporter*).

7.30. — Soient f et g des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Existe-t-il $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+x\,g(t)}\,dt$?

7.31. — Etudier la continuité au point 0 de F définie par :

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt^2)}{t^2}\,dt \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

732. — Montrer : $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(x^2+t^2)^2} \ln \left|\frac{1+t}{1-t}\right| dt = \frac{\pi}{2x(x^2+1)}$, $(x > 0)$.

7.33. — Existence et calcul de : $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2} dt$, $(x > 0)$.

7.34. — On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$.

Ensemble de définition de f ? Etude au voisinage de 0.

7.35. — Soit $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue et bornée.

On pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x f(t)}{x^2+t^2} dt$. Existe-t-il $\lim_{x \to 0} g(x)$?

7.36. — Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe : $\lim_{t \to +\infty} e^{-tx} f(t)$.

Etudier l'existence de $\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t)\, dt$, $(a > 0)$.

7.37. — Montrer que $x \longmapsto \int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, dt$ a un, et un seul zéro sur $[0, \pi]$.

7.38. — Définition, dérivabilité et variation de la fonction f définie par :

a) $f(x) = \int_1^e \frac{dt}{\ln(tx)}$.

b) $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2} dt$. *Etudier la série de terme général $f(n)$.*

7.39. — Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \int_0^1 e^{|x-t|} \sin|x-t|\, dt$. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$.

7.40. — Utiliser 7.2.4, 2° pour trouver un équivalent de :

$$a_n = \frac{1}{\int_0^n (\operatorname{ch} t)^{\alpha}\, dt}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

8
CALCUL DIFFÉRENTIEL

*L'idée fondamentale du calcul différentiel est l'*approximation locale des fonctions par des fonctions linéaires ou affines. *Les applications en sont nombreuses, tant en Physique qu'en Mathématiques ; citons, en ce qui nous concerne, le problème des* fonctions implicites, *dont nous déduirons l'*inversion locale des applications, *celui des* équations différentielles, *dont une expression approchée des solutions s'obtient par linéarisation, et enfin la* Géométrie différentielle.

L'introduction de la notion d'application différentiable a permis d'obtenir une formulation intrinsèque *du calcul infinitésimal. Dans tout le chapitre E, F, G,... désigneront des espaces vectoriels normés non nuls sur le corps* $\mathbb{R}$ *(en abrégé : e.v.n.). L'espace vectoriel* $\mathcal{L}(E, F)$ *des applications linéaires continues de E dans F est muni de la norme définie au* 3.1.2, 2°. *En particulier,* $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ *est le dual topologique de E ; on le note E'.*

Dans les questions théoriques, il est inutile de faire une hypothèse de dimension. Cependant la plupart des e.vn.. qui interviennent dans les applications sont de dimensions finies. Dans le cas où E a une dimension finie p, le choix d'une base de E permet de se ramener à $E = \mathbb{R}^p$*; une fonction de E vers F devient ainsi* une fonction de p variables réelles.

Quand nous nous donnerons un ouvert d'un e.v.n. nous le considérerons comme non vide (mais, au cours d'une démonstration, on peut rencontrer un ouvert vide).

8.1. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

8.1.*1*. Notion d'application différentiable

1° *Différentiabilité en un point.* — Soient E et F deux e.v.n., U un ouvert de E, a un point de U, et enfin f une application de U dans F. Avec ces notations :

THÉORÈME ET DÉFINITION. — **S'il existe une application linéaire continue $l : E \longrightarrow F$ vérifiant la condition** [1]

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - l\cdot h) = 0 \qquad (1)$$

alors cette application linéaire est unique ; on l'appelle différentielle de f au point a, on la note $\mathrm{d}f(a)$, et on dit que l'application f est différentiable au point a.

– Remarquons d'abord que, pour toute application linéaire $l : E \to F$, la fonction $h \longmapsto f(a+h) - f(a) - l.h$ est définie au voisinage de 0 et s'annule au point 0. Il en résulte que (1) équivaut à

$$f(a+h)-f(a)-l\cdot h = o\,(\|h\|), \quad \text{au voisinage de } 0.$$

— Ceci dit, supposons qu'il existe deux éléments l_1 et l_2 de l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F vérifiant (1) ; alors $u = l_2 - l_1$ est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ vérifiant $u\cdot h = o\,(\|h\|)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall\, h \in E \qquad (\|h\| \leqslant \alpha) \Longrightarrow (\|u\cdot h\| \leqslant \varepsilon\,\|h\|).$$

Pourvu que $\|h\| \leqslant 1$, ce qui entraîne $\|\alpha\, h\| \leqslant \alpha$, on a donc :

$$\|u\cdot \alpha\, h\| \leqslant \varepsilon\,\|\alpha\, h\|, \text{ et } \|u\cdot h\| \leqslant \varepsilon\,\|h\| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit : $\quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad \|u\| \leqslant \varepsilon$

et donc : $\qquad u = 0.$ □

Autre forme de la définition. — Reprenons $f : U \longrightarrow F$ et $a \in U$. Désignons par $U - a$ l'ensemble $\{x \in E \,|\, (a+x) \in U\}$, qui est un voisinage ouvert de 0 dans E, et qu'il ne faut pas confondre avec $U \setminus \{a\}$. A toute application $l \in \mathcal{L}(E, F)$ nous pouvons associer l'application $\varphi : (U - a) \longrightarrow F$ déterminée par :

$$\varphi(0) = 0\,; \qquad \varphi(h) = \frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - l\cdot h) \quad \text{si } h \neq 0.$$

On a $l = \mathrm{d}f(a)$ si, et seulement si φ est continue au point 0.

— Notons que, lorsqu'il en est ainsi, l'application $h \longmapsto \|h\|\,\varphi(h)$ est également continue au point 0, ce qui — compte tenu de la continuité de l — implique la continuité de $h \longmapsto f(a+h)$ au point 0, et celle de f au point a. D'où :

THÉORÈME. — **Si f est différentiable au point a, alors f est continue au point a.**

Nous verrons au 7° que la réciproque est fausse.

3° REMARQUES. – *a*) Si $\dim E < +\infty$, *la clause relative à la continuité de l est automatiquement remplie* (3.1.4, 4°).

---

[1] L'image de $h \in E$ par $l \in L(E, F)$ sera notée $l\cdot h$, de préférence à $l(h)$.

b) Si l'on remplace les normes sur E et F, notées $\|.\|$, *par des normes équivalentes, notées* $|||.|||$, *l'existence et la valeur de la différentielle de f au point a ne sont pas remises en cause* ; en particulier si dim E $< +\infty$ et dim $F < +\infty$, il est inutile de préciser les normes choisies.

En effet les topologies de E et F ne changent pas et U reste un ouvert de E. Supposons qu'avec les anciennes normes f admette au point a une différentielle l. L'application linéaire l reste continue avec les nouvelles normes. En utilisant l'existence de α et β tels que :

$$\forall h \in E \quad \|h\| \leqslant \alpha |||h||| \ ; \qquad \forall k \in F \quad |||k||| \leqslant \beta \|k\|$$

on peut écrire, pour tout $h \in (U-a)\backslash\{0\}$

$$\frac{|||f(a+h)-f(a)-l\cdot h|||}{|||h|||} \leqslant \alpha\beta \frac{\|f(a+h)-f(a)-l\cdot h\|}{\|h\|}$$

On en déduit qu'avec les nouvelles normes f admet encore l pour différentielle au point a.

c) Soit V un voisinage ouvert de a dans E, et g la restriction de f à $V \cap U$. La différentiabilité de f au point a équivaut à celle de g ; lorsqu'elle est acquise, on a : $\mathrm{d}f(a) = \mathrm{d}g(a)$. Nous dirons que *la différentiabilité est une notion de caractère local.* Cette remarque permet également de parler de différentiabilité d'une *fonction* au voisinage d'un point.

4° ***Extension aux espaces affines.*** — Les notions d'espace *affine* et d'*application affine* sont introduites en II.5.1 et II.5.3. Soient A et B deux espaces affines normés [1] associés à des e.v.n. E et F, U un ouvert de A, a un point de U, et enfin f une application de U dans B. Avec ces notations, le théorème et la définition du 1° restent valables.

En effet on a ici : $f(a+h) \in B$, $f(a) \in B$, et donc $f(a+h) - f(a) \in F$.

REMARQUE. — Choisissons arbitrairement des origines O et O' dans A et B. On dispose ainsi des bijections, qui sont des isométries :

$$\psi : A \to E \quad x \longmapsto \overrightarrow{Ox} \ ; \qquad \theta : B \longmapsto F \quad y \longmapsto \overrightarrow{O'y}$$

A l'application $f : U \to B$ est ainsi associée l'application $f_0 = \theta \circ f \circ \psi^{-1}$, à valeurs dans F, définie sur un ouvert U_0 de E dont un point est $a_0 = \psi(a)$.

En utilisant le fait que ψ et θ sont des isométries, on constate que la différentiabilité de f au point a équivaut à celle de f_0 au point a_0, et que, lorsqu'elle est acquise, on a $\mathrm{d}f(a) = \mathrm{d}f_0(a_0)$.

Cette remarque justifie le fait que, dans la suite du chapitre, nous ne considérerions que des applications d'un e.v.n. E dans un e.v.n. F.

• Voici cependant une notion qui aura précisément de l'intérêt lorsque, en Géométrie, nous travaillerons dans des espaces affines associés à des e.v.n.

5° ***Dérivée suivant un vecteur.*** — DÉFINITION. — **Soient f une application de l'ouvert U de l'e.v.n. E dans l'e.v.n. F, a un « point » de U, v un « vecteur » de $E\backslash\{0\}$. On dit que f admet une dérivée partielle au point a, suivant le vecteur v, si, et seulement si la fonction de $\mathbb{R}$ vers F : $t \longmapsto f(a+tv)$, qui est définie sur un voisinage de 0, admet une dérivée au point 0.**

---

[1] Cela signifie que l'on adopte pour distance de deux points m et n de A (resp. B) la norme du vecteur $\overrightarrow{mn}$ de E (resp. F), ainsi que cela a été dit au II.6.1.1, 1°.

La dérivée partielle au point a, suivant v est alors cette dérivée, à savoir :

$$\lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$

Dans le cas où f est différentiable en a, pour tout $v \in E\backslash\{0\}$ on a, en écrivant (1), avec $h = tv$:

$$\lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \left(\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - \mathrm{d}f(a)\cdot v\right) = 0.$$

D'où l'existence d'une dérivée partielle en a, suivant le vecteur v, précisément égale à $\mathrm{d}f(a)\cdot v$, ce qui permet d'énoncer :

PROPOSITION. — **Si $f: U \to F$ est différentiable en $a \in U$, alors f admet au point a une dérivée partielle suivant tout vecteur $v \in E\backslash\{0\}$, à savoir $\mathrm{d}f(a)\cdot v$.**

La réciproque est fausse. Le lecteur vérifiera que :

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y) = y^2/x \text{ si } x \neq 0\ ; \qquad f(0, y) = 0$$

admet en (0,0) une dérivée partielle suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, et que f n'est pas continue, et n'est donc pas différentiable au point (0,0).

6° ***Notion d'application affine tangente.*** — DÉFINITION. — **Soient f et g deux applications d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans un e.v.n. F. On dit que g est tangente à f au point $a \in U$ si et seulement si on a**

$$f(a) = g(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a,\ x\neq a} \frac{1}{\|x-a\|}(f(x)-g(x)) = 0_F \qquad (2)$$

(ou, en notation de Landau : $f(x)-g(x) = o(\|x-a)\|$, au voisinage de a).

Le lecteur vérifiera aisément que « g_2 est tangente en a à g_1 » est une relation d'équivalence dans $\mathcal{F}(U, F)$; cette relation est dite *contact* en a.

PROPOSITION. — **L'application $f: U \to F$ est différentiable en a si, et seulement s'il existe une application affine continue de E dans F dont la restriction à U soit tangente à f en a ; cette application affine est alors unique.**

— S'il existe $\mathrm{d}f(a)$, on constate, en utilisant (1) que la restriction à U de l'application affine continue $x \longmapsto f(a)+\mathrm{d}f(a)\cdot(x-a)$ est tangente à f en a.

— S'il existe une application affine continue u de E dans F dont la restriction g à U vérifie (2), alors l'application linéaire $l: h \longmapsto u(a+h)-u(a)$ est continue et vérifie (1) ; f admet donc l pour différentielle en a. □

7° ***Cas d'une fonction d'une variable réelle.*** — THÉORÈME. — **La différentiabilité en un point d'une fonction d'une variable réelle équivaut à sa dérivabilité en ce point.**

Ici f est une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ dans un e.v.n. F ; soit $a \in U$; il existe un intervalle ouvert I, tel que $\{a\} \subset I \subset U$; on peut donc parler de la dérivabilité de f au point a.

On sait (**3**.1.*2*, 2°) que les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans F (automatiquement continues) sont les applications de la forme $h \longmapsto hb$, $b \in F$. La différentiabilité de f au point a équivaut donc à l'existence de $b \in F$ tel que :

$$\lim_{h \to 0,\, h \neq 0} \frac{1}{|h|}(f(a+h) - f(a) - hb) = 0$$

ou encore tel que :

$$\lim_{h \to 0,\, h \neq 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - b\right) = 0. \qquad \square$$

Retenons que, lorsque la différentiabilité est acquise on a :

$$\mathrm{d}f(a) : h \longmapsto hf'(a), \text{ et donc } f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$$

On passe de $f'(a)$ à $\mathrm{d}f(a)$ par la bijection :

$$F \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \qquad b \longmapsto (h \longmapsto hb)$$

qui est isomorphisme d'espaces vectoriels conservant la norme (isométrie au sens du **3**.1.*2*, 5°).

Retenons d'autre part qu'une fonction d'une variable réelle peut être continue en un point sans être différentiable en ce point.

Remarque. — Certains auteurs s'autorisent de cette bijection pour désigner la dérivée et la différentielle par le même symbole, à savoir $f'(a)$. Nous ne commettrons pas cet abus de langage.

8° ***Différentiabilité sur un ouvert.*** — Reprenons les notations du 1°.

Définition. — **On dit que l'application $f: U \to F$ est différentiable sur U si, et seulement si f est différentiable en tout point de U ; l'application**

$$\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \qquad x \longmapsto \mathrm{d}f(x)$$

est alors appelée application différentielle de f sur U ; lorsqu'elle est continue, on dit que f est continûment différentiable (ou de classe C^1) sur U.

Notons qu'une application différentiable sur U est continue (ou de classe C^0) sur U.

Exemples. — Le lecteur vérifiera que $f: U \to F$ est de classe C^1 sur U dans les cas suivants :

a) f est constante. On a alors $\mathrm{d}f(a) = 0$ pour tout $a \in U$;

b) f est restriction à U d'une application linéaire continue l (resp. d'une application affine associée à une application linéaire continue l). On a alors $\mathrm{d}f(a) = l$ pour tout $a \in U$. L'application $\mathrm{d}f$ est donc constante.

9° ***Immersion, submersion, plongement.*** — Soit f une application continûment différentiable d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans un e.v.n. F.

Définition. — **On dit que f est une immersion (resp. submersion) si et seulement si, pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}f(x)$ est injective (resp. surjective).**

On dit que f est un plongement si et seulement si elle est à la fois une immersion et une injection qui induit un homéomorphisme de U sur $f(U)$, considéré comme sous-espace topologique de F.

10° ***Formes différentielles de degré un.*** — DÉFINITION. — **Soient E un e.v.n. et U un ouvert de E. On appelle forme différentielle de degré 1 (ou 1-forme différentielle) sur U, toute application ω de U dans E', dual topologique de E.**

La forme différentielle ω est dite exacte s'il existe $f : U \longmapsto \mathbb{R}$, différentiable, telle que $\omega = \mathrm{d}f$.

8.1.*2*. Différentielle d'une application composée

1° On considère trois e.v.n. E, F, G, des ouverts U et V de E et F, deux applications $f : U \longrightarrow F$ et $g : V \longrightarrow G$, et enfin un point a de U. On suppose que $f(a)$ est un point de V, que l'on note b. *Si f est continue en a* (ce qui est le cas lorsqu'on la suppose différentiable en a), $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a. Il existe donc un ouvert U' de E vérifiant $\{a\} \subset U' \subset (U \cap f^{-1}(V))$, et on dispose alors de la fonction composée $g \circ f$, définie au voisinage de a. Dans la pratique, on suppose $f(U) \subset V$; $g \circ f$ est alors une application de U dans G. Avec ces notations :

THÉORÈME. — **Si f et g sont respectivement différentiables aux points a et $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a et**

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a). \tag{1}$$

L'hypothèse se traduit (**8**.1.*1*, 1°) par :

$$\forall h \in U-a \qquad f(a+h)-f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot h+\|h\|\,\varphi(h) \tag{2}$$

où φ est nulle et continue au point 0_E, et par :

$$\forall l \in V-b \qquad g(b+l)-g(b) = \mathrm{d}g(b)\cdot l+\|l\|\,\psi(l) \tag{3}$$

où ψ est nulle et continue au point 0_F.

A tout $h \in U-a$ on peut associer le vecteur

$$k(h) = f(a+h)-b = f(a+h)-f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot h+\|h\|\,\varphi(h)$$

qui appartient à $V-b$, ce qui permet d'écrire, grâce à (3) :

$$g \circ f(a+h)-g \circ f(a) = \mathrm{d}g(b)\cdot(\mathrm{d}f(a)\cdot h+\|h\|\,\varphi(h))+\|k(h)\|\,\psi(k(h))$$

— Etudions l'application $\varepsilon : (U-a)\backslash\{0_E\} \to G$ déterminée par :

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{\|h\|}(g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - (\mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a))\cdot h)$$

ce qui s'écrit :

$$\varepsilon(h) = \mathrm{d}g(b)\cdot\varphi(h) + \frac{\|k(h)\|}{\|h\|}\,\psi(k(h)).$$

Il s'agit de prouver : $\lim\limits_{h\to 0,\, h\neq 0} \varepsilon(h) = 0_G$.

Comme $\mathrm{d}g(b) \circ \varphi$ et $\psi \circ k$ sont continues au point 0_E (au titre de composées d'applications continues), on a :

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{d}g(b)\cdot\varphi(h) = 0_G \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \psi(k(h)) = 0_G.$$

D'autre part on a :

$$\frac{\|k(h)\|}{\|h\|} = \left\| \frac{1}{\|h\|} \mathrm{d}f(a) \cdot h + \varphi(h) \right\| \leqslant \|\mathrm{d}f(a)\| + \|\varphi(h)\|.$$

Or on peut trouver un voisinage W de 0_E sur lequel $\|\varphi(h)\|$ est borné ; il en résulte que $\frac{\|k(h)\|}{\|h\|}$ est borné sur $W \setminus \{0_E\}$. □

2° Cas particuliers. — *a*) Dans le cas $E = \mathbb{R}$, il suffit de prendre les images de $1 \in \mathbb{R}$ par les deux membres de (1) pour obtenir le théorème sous la forme :

$$(g \circ f)'(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \cdot f'(a)$$

qui fait intervenir les dérivées $f'(a) \in F$, $(g \circ f)'(a) \in G$ et la différentielle $\mathrm{d}g(f(a)) \in \mathfrak{L}(F, G)$.

Il est aisé de vérifier que le résultat subsiste si f est défini sur un intervalle U quelconque (pas nécessairement ouvert).

b) Toujours dans le cas $E = \mathbb{R}$, choisissons $a = 0$, $f(t) = b + th$, où h est un vecteur fixé de F. On obtient :

$$\mathrm{d}g(b) \cdot h = (g \circ f)'(0).$$

Cette remarque est très utile dans la pratique pour déterminer $\mathrm{d}g(b)$, lorsqu'on sait que g est différentiable en b.

c) Dans le cas $F = G = \mathbb{R}$, $\mathrm{d}g(f(a))$ s'écrit $k \longmapsto g'(f(a))k$, $(k \in \mathbb{R})$. Le théorème s'écrit :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = g'(f(a))\, \mathrm{d}f(a)$$

(le second membre est le produit de $\mathrm{d}f(a) \in \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$ par le réel $g'(f(a))$).

3° Les notations étant celles du 1°, avec $f(U) \subset V$; on a, en utilisant éventuellement la composition des applications continues :

Proposition. — **Si f et g sont différentiables (resp. de classe C^1) sur U et V respectivement, alors $g \circ f$ est différentiable (resp. de classe C^1) sur U.**

En particulier, si $F = G = \mathbb{R}$, on pourra écrire :

$$\forall x \in U \;\; \mathrm{d}(g \circ f)(x) = g'(f(x))\, \mathrm{d}f(x)$$

et abréviativement : $\mathrm{d}(g \circ f) = (g' \circ f)\, \mathrm{d}f$

(égalité entre applications $U \longrightarrow \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$, ou encore entre *formes différentielles* de degré 1 (cf. **8**.1.*1*, 10°).

C'est ainsi, par exemple :

$$\mathrm{d}(\mathrm{Arc\,tg}\, f) = \frac{1}{1+f^2}\mathrm{d}f \; ; \; \mathrm{d}(e^f) = e^f\, \mathrm{d}f \; ; \; \mathrm{d}(f^n) = n f^{n-1}\, \mathrm{d}f \;\; (n \in \mathbb{N}^*)$$

que, dans la mesure où f ne prend pas la valeur 0 :

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\mathrm{d}f \; ; \qquad \mathrm{d}(\mathrm{Log}\,|f|) = \frac{1}{f}\mathrm{d}f$$

que, dans la mesure où f prend ses valeurs sur $\mathbb{R}_+^*$;

$$\mathrm{d}(f^\alpha) = \alpha f^{\alpha-1}\mathrm{d}f, \; (\alpha \in \mathbb{R}).$$

4° ***Complément sur la différentielle d'une restriction.*** — Soient E un e.v.n., E' un sous-espace de E muni de la norme induite, U un ouvert de E tel que l'ouvert $U' = U \cap E'$ de E' soit non vide, enfin a un point de U'. On considère une application f de U dans un e.v.n. F, différentiable en a. On dispose de la restriction de f à U', qui s'écrit $f \circ j'$ en désignant par j' l'injection canonique de U' dans E. En remarquant que j' admet pour différentielle au point a l'injection canonique j de E' dans E, le théorème du 1° dit que $f \circ j'$ admet pour différentielle au point a :

$$d(f \circ j')(a) = \mathrm{d}f(j'(a)) \circ \mathrm{d}j'(a) = \mathrm{d}f(a) \circ j$$

Retenons : $d(f|_{U \cap E'})(a) = \mathrm{d}f(a)|_{E'}$

8.1.3. L'inégalité des accroissement finis

Comme première application de la différentiation d'une application composée nous allons étendre le théorème des accroissements finis (4.2.1, 1°) au cas d'une fonction définie non plus sur un intervalle de $\mathbb{R}$, mais sur un ouvert d'un e.v.n. Rappelons :

DÉFINITION. — Etant donnés deux points a et b d'un e.v.n. E, on appelle segment de E d'extrémités a et b, et on note $[a, b]$, l'image de $[0, 1]$ par l'application :

$$\varphi : \mathbb{R} \to E \quad \xi \longmapsto a + \xi(b-a)$$

On pose : $]a, b[\, = \varphi(]0, 1[)$ et $]a, b] = \varphi(]0, 1])$.

1° THÉORÈME. — **Soient f une application d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans un e.v.n. F, $[a, a+h]$ un segment de E inclus dans U, et enfin M un réel positif. Si f est continue en tout point de $[a, a+h]$, et admet en tout point de $]a, a+h[$ une différentielle majorée en norme par M, alors :**

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant M\|h\|. \tag{1}$$

L'application $g : \xi \longmapsto f(a+\xi h)$ de $[0, 1]$ dans F est continue comme composée d'applications continues. D'après 8.1.2, 2°, a), elle admet en tout $\xi \in]0, 1[$ la dérivée $g'(\xi) = \mathrm{d}f(a+\xi h)\cdot h$. On a :

$$\forall\, \xi \in]0, 1[\qquad \|g'(\xi)\| \leqslant \|\mathrm{d}f(a+\xi h)\|\,\|h\| \leqslant M\,\|h\|.$$

En appliquant à g le corollaire du 4.2.1, 1°, on obtient :

$$\|g(1) - g(0)\| \leqslant M\,\|h\| \qquad \square$$

2° ***Cas d'une fonction numérique.*** — Pour $F = \mathbb{R}$, on obtient un résultat plus fin en appliquant à g le théorème de Rolle (4.3.4), à savoir :

THÉORÈME. — **Soient f une application d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans $\mathbb{R}$, et $[a, a+h]$ un segment de E inclus dans U. Si f est continue en tout point de $[a, a+h]$, et différentiable en tout point de $]a, a+h[$, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :**

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a+\theta h)\cdot h. \tag{2}$$

3° Voici quatre corollaires du théorème du 1°.

COROLLAIRE I. — **Soient f une application d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans un e.v.n. F, $[a, a+h]$ un segment de E inclus dans U, l un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, enfin M un réel positif. Si f est continue en tout point de $[a, a+h]$, et admet en tout point $x \in]a, a+h[$ une différentielle telle que $\mathrm{d}f(x)-l$ soit majorée en norme par M, alors :**

$$\|f(a+h)-f(a)-l\cdot h\| \leqslant M\|h\|.$$

On applique le théorème à : $x \longmapsto f(x)-l\cdot(x-a)$.

COROLLAIRE II. — **Soit f une application continue d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans un e.v.n. F, et a un point de U. On suppose que f est différentiable en tout point de $U\backslash\{a\}$ et que, dans l'e.v.n. $\mathcal{L}(E, F)$, il existe $l = \lim\limits_{x \to a,\, x \neq a} \mathrm{d}f(x)$. Alors f est différentiable au point a et $\mathrm{d}f(a) = l$.**

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une boule ouverte B de E, centrée en a, incluse dans U, telle que :

$$\forall x \in B\backslash\{a\} \qquad \|\mathrm{d}f(x)-l\| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout point $a+h$ de $B\backslash\{a\}$ on a :

$$\forall x \in]a, a+h[\qquad \|\mathrm{d}f(x)-l\| \leqslant \varepsilon$$

et donc, d'après le corollaire I :

$$\|f(a+h)-f(a)-l\cdot h\| \leqslant \varepsilon\|h\| \qquad \square$$

COROLLAIRE III. — **Soient f une application d'un ouvert convexe U d'un e.v.n. E dans un e.v.n. F, et M un réel positif. Si f admet en tout point de U une différentielle majorée en norme par M, alors f est M-lipschitzienne (et donc uniformément continue).**

La convexité de U fait que, pour tout $(x, y) \in U^2$, on a $[x, y] \subset U$. On peut appliquer le théorème du 1° et écrire :

$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant M\|x-y\| \qquad \square$$

COROLLAIRE IV. — **Soit f une application d'un ouvert connexe U d'un e.v.n. E dans un e.v.n. F, admettant une différentielle nulle en tout point de U. Alors f est constante.**

On sait (théorème III du **3**.1.*1*, 6°) que $a \in U$ ayant été arbitrairement choisi, on peut associer à tout $x \in U$ une ligne polygonale de E, d'extrémités a et x, incluse dans U. Le théorème du 1°, utilisé pour $M = 0$, dit que f prend la même valeur en deux sommets consécutifs de cette ligne, ce qui exige $f(x) = f(a)$. $\square$

8.1.*4*. Différentielle d'une application à valeurs dans un produit

1° *Notations.* — Soit f une application d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans un produit d'e.v.n. $F = \prod\limits_{i=1}^{q} F_i$, ce qui permet d'écrire :

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x))$$

et d'en déduire la notation $f = (f_1, \ldots, f_q)$.

Nous introduirons les applications :

$$s_i : F \to F_i \qquad (y_1, \ldots, y_q) \longmapsto y_i \qquad (i\text{-ième projection canonique})$$
$$u_i : F_i \to F \qquad y_i \longmapsto (\ldots, 0, y_i, 0, \ldots) \quad (i\text{-ième injection canonique})$$

Chaque s_i (resp. u_i), qui est linéaire et continue, est sa propre différentielle en tout point de F (resp. F_i). Nous constatons :

$$f = \sum_{i=1}^{q} u_i \circ f_i ; \tag{1}$$

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_q \qquad f_i = s_i \circ f. \tag{2}$$

2° Théorème I. — **Les notations étant celles du 1°, f est différentiable au point $a \in U$ si, et seulement si chaque f_i est différentiable au point a ; on a alors :**

$$\mathrm{d}f(a) : h \longmapsto (\mathrm{d}f_1(a)\cdot h, \ldots, \mathrm{d}f_q(a)\cdot h) \tag{3}$$

ce qui peut s'écrire $\mathrm{d}f(a) = (\mathrm{d}f_1(a), \ldots, \mathrm{d}f_q(a)).$ (3′)

— Si f est différentiable en a, alors d'après (2) chaque f_i est différentiable en a (différentiabilité des applications composées) et $\mathrm{d}f_i(a) = s_i \circ \mathrm{d}f(a)$, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, ce qui n'est autre que (3′).

— Supposons les f_i toutes différentiables en a, et posons :

$$l = (\mathrm{d}f_1(a), \ldots, \mathrm{d}f_q(a)) = \sum_{i=1}^{q} u_i \circ \mathrm{d}f_i(a).$$

l est une application linéaire continue de E dans F.
On constate que, pour $h \neq 0$ et $\|h\|$ assez petit :

$$\frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - l\cdot h) = \sum_{i=1}^{q} u_i \circ \frac{1}{\|h\|}(f_i(a+h) - f_i(a) - \mathrm{d}f_i(a)\cdot h).$$

Il en résulte :

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - l\cdot h) = 0 \qquad \square$$

Théorème II. — **Les notations étant celles du 1°, f est différentiable (resp. de classe C^1) sur U si, et seulement si chaque f_i est différentiable (resp. de classe C^1) sur U.**

En ce qui concerne les différentiabilités sur U, il s'agit d'une conséquence du théorème I. Supposons les acquises ; il reste à vérifier l'équivalence des continuités sur U de $\mathrm{d}f$ et des $\mathrm{d}f_i$. Nous avons :

$$\forall\, x \in U \qquad \mathrm{d}f(x) = \sum_i u_i \circ \mathrm{d}f_i(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f_i(x) = s_i \circ \mathrm{d}f(x), \ (1 \leqslant i \leqslant q) \tag{4}$$

En introduisant les applications, visiblement linéaires :

$$\begin{cases} U_i : \mathcal{L}(E, F_i) \to \mathcal{L}(E, F) & l_i \longmapsto u_i \circ l_i \\ S_i : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E, F_i) & l \longmapsto s_i \circ l \end{cases}$$

on constate que (4) s'écrit :

$$\mathrm{d}f = \sum_i U_i \circ \mathrm{d}f_i \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f_i = S_i \circ \mathrm{d}f, \quad (1 \leqslant i \leqslant q).$$

Or les U_i et les S_i sont continues. On a en effet :

$$\forall l_i \in \mathcal{L}(E, F_i) \qquad \| U_i(l_i) \| \leqslant \|u_i\| \, \|l_i\|$$
$$\forall l \in \mathcal{L}(E, F) \qquad \| S_i(l) \| \leqslant \|s_i\| \, \|l\| \qquad \square$$

En conclusion, on peut dire que la différentiabilité d'une application à valeurs dans un produit d'e.v.n. ne pose pas de problème sérieux ; nous verrons au **8**.1.*5* qu'il n'en est pas de même pour celle d'une application définie sur un produit d'e.v.n.

3° ***Application : linéarité de la différentiation.*** — Soient E et F deux e.v.n. et U un ouvert de E.

PROPOSITION I. — **L'ensemble des applications de U dans F différentiables au point $a \in U$ est un sous-espace vectoriel de F^U ; $f \longmapsto \mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de ce sous-espace dans $\mathcal{L}(E, F)$.**

— L'application nulle de U dans F est différentiable au point a.

— Soient α et β deux réels, f et g deux applications de U dans F différentiables au point a. On constate que $\alpha f + \beta g$ s'écrit $w \circ v$ avec

$$w : F \times F \to F \qquad (\xi, \eta) \longmapsto \alpha\xi + \beta\eta$$
$$v : U \to F \times F \qquad x \longmapsto (f(x), g(x))$$

Or, d'après le 2°, v est différentiable au point a ; d'autre part l'application linéaire continue w est sa propre différentielle en tout point de $F \times F$. En utilisant **8**.1.*2*, on en déduit l'existence de :

$$\mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha \mathrm{d}f(a) + \beta \mathrm{d}g(a) \qquad \square$$

Le lecteur pourra rechercher une démonstration directe de la proposition I. Il déduira ensuite de cette proposition :

PROPOSITION II. — **L'ensemble des applications de U dans F différentiables sur U (resp. de classe C^1 sur U) est un espace vectoriel ; $f \longmapsto \mathrm{d}f$ est une application linéaire de cet espace dans $\mathcal{F}(U, \mathcal{L}(E, F))$.**

8.1.*5*. Différentielle d'une application définie sur un produit

1° ***Notations.*** — *a*) Soit f une application d'un ouvert U d'un produit d'e.v.n. $E = \prod_{j=1}^{p} E_j$ dans un e.v.n. F.

Nous écrirons $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $f(x) = f(x_1, \ldots, x_p)$.

Les projections canoniques seront notées $t_j : E \to E_j$; les injections canoniques seront notées $v_j : E_j \to E$.

b) Applications partielles ; différentielles partielles. — Soit en outre un point $a = (a_1, ..., a_p)$ de U. Pour tout $j \in \mathbb{N}_p$, nous disposons de l'application

$$\omega_{a,j} : E_j \to E \qquad x_j \longmapsto (a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_p)$$

On a $\omega_{a,j} : x_j \longmapsto a + v_j \cdot (x_j - a_j)$, ce qui montre que $\omega_{a,j}$ est une application affine associée à l'application linéaire continue v_j ; $\omega_{a,j}$ admet ainsi v_j pour différentielle en tout point de E_j.

Désignons par U_j le voisinage ouvert $\omega_{a,j}^{-1}(U)$ de a_j, et considérons la *j-ième application partielle de f au point a* (cf. 2.2.3, 3°).

$$\varphi_{a,j} : U_j \to F \quad x_j \longmapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_p)$$

un abus de notation permettant d'ailleurs d'écrire : $\varphi_{a,j} = f \circ \omega_{a,j}$.

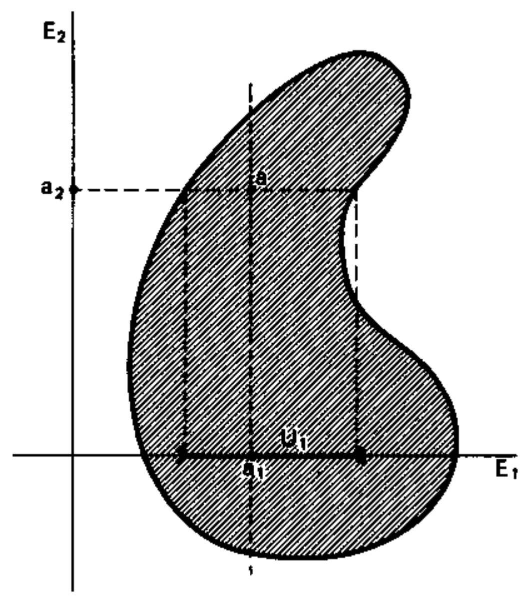


FIG. 11

— Si l'application $\varphi_{a,j}$ admet une différentielle au point a_j,

$$d\varphi_{a,j}(a_j) \in \mathcal{L}(E_j, F) \quad ,$$

celle-ci est dite j-ième *différentielle partielle de f* au point a, et notée $\partial_j f(a)$.

— Enfin si f admet une j-ième différentielle partielle en tout point de U, on dit que f admet une j-ième *application différentielle sur U*, à savoir :

$$\partial_j f : U \to \mathcal{L}(E_j, F) \qquad x \longmapsto \partial_j f(x) \quad .$$

2° THÉORÈME I. — **Les notations étant celles du 1°, une condition nécessaire (non suffisante) pour que f soit différentiable au point $a \in U$ est que les p différentielles partielles de f au point a existent ; on a alors :**

$$df(a) : (h_1, ..., h_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \cdot h_j \tag{1}$$

— Si f est différentiable en a, alors, pour tout $j \in \mathbb{N}_p$, $\varphi_{a,j} = f \circ \omega_{a,j}$ est la composée de deux applications différentiables ; d'où l'existence de :

$$\partial_j f(a) = \mathrm{d}f(a) \circ v_j. \tag{2}$$

En remarquant que $\sum_{j=1}^{p} v_j \circ t_j = \mathrm{Id}_E$, on obtient :

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{d}f(a) \circ v_j \circ t_j.$$

Compte tenu de (2), ceci s'écrit : $\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \circ t_j$ qui n'est autre que (1).

Voici un *contre-exemple* qui montre que *la condition n'est pas suffisante* :

$$E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \qquad F = \mathbb{R} \ ; \qquad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \ ; \qquad f(0, 0) = 0$$

Comme $f(x, x)$ est égal à $1/2$ pour $x \neq 0$, f n'est pas continue, et donc n'est pas différentiable au point $a = (0,0)$. Or les applications partielles en a sont :

$$\varphi_{a,1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x, 0), \text{ qui s'écrit } x \longmapsto 0$$

$$\varphi_{a,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad y \longmapsto f(0, y), \text{ qui s'écrit } y \longmapsto 0$$

Les deux différentielles partielles de f au point a existent (et sont nulles). □

THÉORÈME II. — **Les notations étant celles du 1°, une condition suffisante pour que f soit différentiable au point $a \in U$ est que les p différentielles partielles de f sur U existent, et qu'elles soient continues au point a.**

E est muni de la norme $x \longmapsto \max_{1 \leqslant j \leqslant p} \|x_j\|$.

U étant ouvert, il existe une boule ouverte B de E, de centre 0_E et de rayon $\rho > 0$, telle que la boule ouverte $a + B$ soit incluse dans U.

Notons l l'application $\sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) \circ t_j$ de E dans F qui (par composition et addition) est linéaire et continue ; nous avons

$$l(h) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a) . h_j.$$

Nous allons prouver que l est la différentielle de f en a, i.e. que l'application $h \longmapsto f(a + h) - f(a) - l(h)$ de B dans F est négligeable devant $h \longmapsto h$, au voisinage de 0_E.

— Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in B$, avec $h = (h_1, \ldots, h_p)$.

Pour $j \in \mathbb{N}_p$, notons $b_j(h)$ le point de E :

$$(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1} + h_{j+1}, \ldots, a_p + h_p)$$

qui appartient visiblement à $a + B$, ce qui, en convenant $b_{p+1}(h) = a$, permet de disposer de :

$$g_j(h) = f(b_j(h)) - f(b_{j+1}(h)) - \partial_j f(a) . h_j$$

Ainsi :

$$f(a + h) - f(a) - l(h) = \sum_{j=1}^{p} g_j(h).$$

– Pour $j \in \mathbb{N}_{p-1}$, nous disposons de la fonction de E_j vers F :

$$\psi_j : x_j \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + x_j, a_{j+1} + h_{j+1}, \ldots, a_p + h_p) - \partial_j f(a).x_j$$

qui (grâce à $h \in B$) est définie en tout point x_j du segment $[0_{E_j}, h_j]$ de E_j, et y admet la différentielle :

$$d\psi_j(x_j) = \partial_j f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + x_j, a_{j+1} + h_{j+1}, \ldots, a_p + h_p) - \partial_j f(a)$$

On a $g_j(h) = \psi_j(h_j) - \psi_j(0)$.

Ceci posé, la continuité des $\partial_j f$ en a ($j \in \mathbb{N}_{p-1}$) entraîne l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $k \in B$ vérifient $\|k\| < \alpha$ et pour tout $j \in \mathbb{N}_{p-1}$, on ait :

$$\|\partial_j f(a + k) - \partial_j f(a)\| \leqslant \varepsilon/p.$$

On en déduit que, pourvu que le vecteur $h \in B$ considéré ci-dessus vérifie $\|h\| < \alpha$, on a :

$$\forall x_j \in [0_{E_j}, h_j] \qquad \|d\psi_j(x_j)\| \leqslant \varepsilon/p$$

et, d'après le corollaire I du **8**.1.*3*, 3° :

$$\|g_j(h)\| \leqslant \varepsilon/p.\|h_j\| \leqslant \varepsilon/p.\|h\|.$$

– Pour $j = p$, l'existence de $\partial_p f(a)$ entraîne l'existence de $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pourvu que le vecteur h considéré ci-dessus vérifie $\|h\| < \beta$, et *a fortiori* $\|h_p\| < \beta$, on ait :

$$\|g_p(h)\| \leqslant \varepsilon/p.\|h_p\| \leqslant \varepsilon/p.\|h\|.$$

– En conclusion, pourvu que $h \in B$ vérifie $\|h\| < \min(\alpha, \beta)$, on a :

$$\|f(a + h) - f(a) - l(h)\| \leqslant \varepsilon\|h\|.$$ □

REMARQUE. – La continuité de $\partial_p f$ en (a) n'intervient pas dans la démonstration. Il en résulte que, dans l'énoncé du théorème II, il suffit de supposer l'existence des p différentielles partielles sur U, et la continuité de $p - 1$ d'entre elles au point a.

THÉORÈME III. — **Les notations étant celles du 1°, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continûment différentiable sur U est que les p différentielles partielles de f sur U existent et qu'elles soient continues sur U.**

La condition est nécessaire. — Par hypothèse f est de classe C^1 sur U. D'après le théorème I, les $\partial_j f$ existent. En raisonnant comme au **8**.1.*4*, 2° (théorème II) on peut écrire, pour tout $j \in \mathbb{N}_p$: $\partial_j f = V_j \circ df$, en désignant par V_j l'application linéaire et continue :

$$V_j : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_j, F) \qquad l \longmapsto l \circ v_j.$$

Il en résulte que la continuité de df entraîne celle des $\partial_j f$. □

La condition est suffisante. — Par hypothèse les $\partial_j f$ existent et sont continues sur U. D'après le théorème II, df existe. On a : $\mathrm{d}f = \sum_j T_j \circ \partial_j f$, en désignant par T_j l'application linéaire et continue :

$$T_j : \mathcal{L}(E_j, F) \to \mathcal{L}(E, F) \qquad l_j \longmapsto l_j \circ t_j.$$

La continuité des $\partial_j f$ entraîne celle de df. □

REMARQUE. — La condition suffisante du théorème II n'est pas une condition nécessaire, sinon toute application différentiable sur U serait continûment différentiable sur U. Dans la pratique, c'est le théorème III qui est le plus utile.

3° *Cas d'une fonction de plusieurs variables réelles : dérivées partielles.* — Reprenons les notations du 1° dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$. Si l'application partielle $\varphi_{a,j}$, qui est une fonction d'une variable réelle, admet une dérivée au point a_j, celle-ci est dite j-ième *dérivée partielle de f au point a* et notée $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, ou $f'_{x_j}(a)$. Lorsqu'une telle dérivée partielle existe en tout point de U, on dispose de la j-ième *dérivée partielle de f sur U*, qui est une application $U \to F$ notée $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ou f'_{x_j}.

On constate que l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ équivaut à celle de $\partial_j f(a)$; lorsqu'elle est acquise, on a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a) \cdot 1$.

On en déduit que l'existence et la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ équivalent respectivement à l'existence et à la continuité de $\partial_j f$. Nous laissons au lecteur le soin de reprendre les énoncés des théorèmes I, II, III dans le cas $E = \mathbb{R}^p$ en remplaçant *différentielles partielles*, par *dérivées partielles*. Il constatera en particulier que, lorsque d$f(a)$ existe, on a (formule (1)) :

$$\mathrm{d}f(a) : (h_1, \dots, h_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

(ici $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est un vecteur de F, h_j est un scalaire de $\mathbb{R}$).

Dans la pratique, on écrit $f(x, y)$ pour $f(x_1, x_2)$, ..., et $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, ...

4° *Complément sur les 1-formes différentielles.* — Nous utiliserons la définition du **8**.1.*1*, 10°, dans le cas $E = \mathbb{R}^p$.

Soit $t_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ la j-ième projection canonique, considérée comme une forme linéaire. Etant donné l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$, nous notons x_j la restriction de t_j à U ; nous disposons ainsi de l'application différentiable $x_j : U \to \mathbb{R}$.

L'application différentielle dx_j de cette application x_j est (**8**.1.*1*, 8°) l'application constante de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ dont la valeur en tout point de

U est $t_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Ainsi pour tout $x \in U$ nous disposons des p éléments $dx_j(x) = t_j$ qui constituent la base canonique de $(\mathbb{R}^p)^*$.

Soit ω une 1- forme différentielle sur U, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in U$ donné, $\omega(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. L'image du vecteur $h = (h_1, ..., h_p)$ de $\mathbb{R}^p$ par cette application s'écrit :

$$\omega(x\,;h) = \omega(x)\cdot h = \sum_{j=1}^{p} P_j(x)h_j$$

où $P_j(x) = \omega(x)\cdot e_j$, en désignant par e_j le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Ainsi, pour tout $x \in U$, la décomposition de $\omega(x)$ dans la base canonique de $(\mathbb{R}^p)^*$ est :

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{p} P_j(x)\, dx_j(x)$$

En s'autorisant du fait que l'application dx_j est constante, on l'écrit

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{p} P_j(x)\, dx_j.$$

Cette étude conduit à adopter l'écriture, dite canonique, de ω :

$$\omega = \sum_{j=1}^{p} P_j\, dx_j.$$

5° ***Différentielle d'une application multilinéaire continue.*** — Voici maintenant une application des résultats obtenus au 2°.

THÉORÈME. — **Soit u une application p-linéaire et continue d'un e.v.n. produit $E = \prod_{j=1}^{p} E_j$ dans un e.v.n. F. Alors u est continûment différentiable sur E, et pour tout $a = (a_1. ..., a_p) \in E$ on a :**

$$du(a) : (h_1, ..., h_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} u(a_1, ..., a_{j-1}, h_j, a_{j+1}, ..., a_p). \qquad (6)$$

Pour $j \in \mathbb{N}_p$ et $a \in E$ donnés, la j-ième application partielle :

$$\varphi_{a,j} : E_j \to F \quad x_j \longmapsto u(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_p)$$

qui est linéaire et continue, est sa propre différentielle au point a_j. D'où l'existence de $\partial_j u(a)$, qui n'est autre que $\varphi_{a,j}$. Grâce au théorème I du 2°, on en déduit que, si $du(a)$ existe, alors $du(a)$ admet l'expression (6).

Reste à montrer que, pout tout $j \in \mathbb{N}_p$, l'application :

$$\partial_j u : E \to \mathcal{L}(E_j, F) \qquad a \longmapsto \varphi_{a,j}$$

est continue, ce qui entraînera (théorème III du 2°) l'existence et la continuité de du. Ecrivons $\partial_j u = \theta_j \circ \varphi_j$ avec :

$$\varphi_j : E \to E_1 \times ... \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times ... \times E_p \qquad (x_1, ..., x_p) \longmapsto (..., x_{j-1}, x_{j+1}, ...)$$

$$\theta_j : E_1 \times ... \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times ... \times E_p \to \mathcal{L}(E_j, F)$$

$$(..., y_{j-1}, y_{j+1}, ...) \longmapsto u(..., y_{j-1}, \cdot, y_{j+1}, ...).$$

En écrivant $\varphi_j = (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_p)$, on constate que la continuité des projections canoniques entraîne celle de φ_j.

Quant à θ_j, elle est $(p-1)$-linéaire. D'autre part :

$$\|\theta_j(\ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots)(x_j)\|, \text{ qui est } \|u(\ldots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \ldots)\|$$

est majoré par : $\|u\| \, \|y_1\| \ldots \|y_{j-1}\| \, \|y_{j+1}\| \ldots \|y_p\| \, \|x_j\|$

D'où : $\|\theta_j(\ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots)\| \leqslant \|u\| \, \|y_1\| \ldots \|y_{j-1}\| \, \|y_{j+1}\| \ldots \|y_p\|$

ce qui prouve que θ_j est continue (et que $\|\theta_j\| \leqslant \|u\|$). □

Cas particulier. — **Une application bilinéaire et continue $u : E_1 \times E_2 \to F$ est différentiable sur $E_1 \times E_2$, et $\mathrm{d}u : E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire et continue.**

Ici $\mathrm{d}u(x_1, x_2)$ s'écrit $(h_1, h_2) \longmapsto u(h_1, x_2) + u(x_1, h_2)$.

D'où la linéarité de $\mathrm{d}u$; on connaît déjà sa continuité. □

6° ***Différentielle d'un produit, d'un quotient.*** — Théorème. — **Soient $f_1, \ldots, f_p$ des applications d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans des e.v.n. $F_1, \ldots, F_p$, différentiables au point $a \in U$ (resp. sur U), et u une application p-linéaire et continue de $F_1 \times \ldots \times F_p$ dans un e.v.n. G. Alors l'application :**

$$g : U \to G \qquad x \longmapsto u(f_1(x), \ldots, f_p(x))$$

est différentiable en a (resp. sur U), et on a :

$$\mathrm{d}g(a) : \quad h \longmapsto \sum_{j=1}^{p} u[\ldots, f_{j-1}(a), \mathrm{d}f_j(a) \cdot h, f_{j+1}(a), \ldots]. \tag{7}$$

Ecrivons $g = u \circ f$, avec $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$.

Nous venons de voir que u est différentiable en tout point. D'autre part, (8.1.*4*, 2°), f est différentiable en a. Il en résulte (8.1.*2*, 1°) que g est différentiable en a, et que l'on a :

$$\mathrm{d}g(a) : h \longmapsto \mathrm{d}u(f(a)) \cdot (\mathrm{d}f(a) \cdot h).$$

L'expression (7) s'en déduit, compte tenu de (6) et de :

$\mathrm{d}f(a) \cdot h = (\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, \ldots, \mathrm{d}f_p(a) \cdot h)$ (8.1.*4*, 2°) □

Remarques. — *a*) On pourra retenir (7) sous la forme :

$$\mathrm{d}(u(f_1, \ldots, f_p)) = \sum_{j=1}^{p} u(\ldots, f_{j-1}, \mathrm{d}f_j, f_{j+1}, \ldots).$$

C'est ainsi que dans le cas d'un produit de fonctions numériques on écrira :

$$\mathrm{d}(f_1 \ldots f_p) = \sum_{j=1}^{p} f_1 \ldots f_{j-1} \cdot \mathrm{d}f_j \cdot f_{j+1} \ldots f_p.$$

Dans le cas d'un produit scalaire ou vectoriel, on écrira

$$d((f_1|f_2)) = (df_1|f_2)+(f_1|df_2) \text{ ou } d(f_1 \wedge f_2) = (df_1 \wedge f_2)+(f_1 \wedge df_2)$$

b) Dans le cas $E = \mathbb{R}$, on retrouve le théorème du **4**,1.*2*, 2°.

CAS D'UN QUOTIENT. — Soient E et F des e.v.n., U un ouvert de E, $f : U \to F$ et $g : U \to \mathbb{R}$ des applications différentiables au point $a \in U$. On suppose que g ne prend pas la valeur 0, ce qui permet de disposer de :

$$1/g : U \to \mathbb{R} \text{ et } f/g : U \to F.$$

On sait (**8**.1.*2*, 2°) que $1/g$ est différentiable en a. En utilisant l'application bilinéaire continue $u : (k, \xi) \longmapsto \xi k$ de $F \times \mathbb{R}$ dans F, on constate que f/g admet au point a la différentielle :

$$d(f/g)(a) : \qquad h \longmapsto \frac{1}{g(a)}(df(a)\cdot h) + f(a)\left(-\frac{1}{g^2(a)}(dg(a)\cdot h)\right)$$

ce que l'on retient sous la forme :

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\, df - f\, dg}{g^2}.$$

8.1.*6*. Cas d'une application d'un produit dans un produit

Il s'agit d'une combinaison des cas étudiés aux **8**.1.*4* et **8**.1.*5*, dont nous empruntons les notations : f est une application d'un ouvert U d'un produit d'e.v.n. $E = \prod_{j=1}^{p} E_j$ dans un produit d'e.v.n. $F = \prod_{i=1}^{q} F_i$, telle que :

$$x = (x_1, ..., x_p) \longmapsto (f_1(x), ..., f_q(x)).$$

— La différentiabilité de f au point $a = (a_1, ..., a_p)$ de U, équivaut (**8**.1.*4*) à la différentiabilité des f_i en a ; lorsqu'elle est acquise on a, en désignant par u_i la i-ième injection canonique associée à F :

$$df(a) = \sum_{i=1}^{q} u_i \circ df_i(a), \qquad (df(a) \in \mathcal{L}(E, F),\ df_i(a) \in \mathcal{L}(E, F_i)).$$

Pour $i \in \mathbb{N}_q$ donné, l'existence de $df_i(a)$ implique (**8**.1.*5*, 2°) celle des p différentielles partielles de f_i au point a, ainsi que l'égalité :

$$df_i(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f_i(a) \circ t_j, \qquad (\partial_j f_i(a) \in \mathcal{L}(E_j, F_i))$$

dans laquelle t_j est la j-ième projection canonique associée à E.

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME I. — **L'existence de la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ implique celle des pq différentielles partielles $\partial_j f_i(a)$, ainsi que l'égalité**

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{(i,\,j) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p} u_i \circ \partial_j f_i(a) \circ t_j. \tag{1}$$

— Des théorèmes II et III du 8.1.5, 2°, on déduit :

THÉORÈME II. — **L'existence des pq différentielles partielles**

$$\partial_j f_i : U \rightarrow \mathcal{L}(E_j, F_i)$$

et leur continuité en a impliquent l'existence de $\mathrm{d}f(a)$.

THÉORÈME III. — **L'application f est continûment différentiable sur U si, et seulement si les différentielles partielles $\partial_j f_i$ existent et sont continues sur U.**

8.1.7. Cas d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

1° ***Notations.*** — Ici $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^q$. Nous avons donc :

$$E = \prod_{j=1}^{p} E_j, \quad E_j = \mathbb{R} \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}_p\,;$$

$$F = \prod_{i=1}^{q} F_i, \quad F_i = \mathbb{R} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}_q.$$

Nous désignons par $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\boldsymbol{e}' = (e'_1, \ldots, e'_q)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. Les points génériques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont notés :

$$x = (x_1, \ldots, x_p) = \sum_j x_j e_j\,; \qquad y = (y_1, \ldots, y_q) = \sum_i y_i e'_i.$$

Il s'agit d'étudier une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ donnée sous la forme :

$$(x_1, \ldots, x_p) \longmapsto (f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_q(x_1, \ldots, x_p)).$$

Les trois théorèmes du 8.1.6 s'appliquent, l'existence des différentielles partielles $\partial_j f_i(a)$ pouvant être remplacée par celle des dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, l'existence et éventuellement la continuité des $\partial_j f_i$ pouvant être remplacées par celles des $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

2° ***Matrice jacobienne.*** — Nous supposons ici que f est différentiable au point $a \in U$, et nous nous proposons de déterminer la $(q \times p)$ matrice réelle $\mathrm{Mat}(\mathrm{d}f(a)\,;\, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}')$ qui est dite matrice jacobienne de f au point a et notée $J_f(a)$.

Etant donné $k \in \mathbb{N}_p$, la k-ième colonne de cette matrice est formée par les composantes de $df(a) \cdot e_k$ dans la base e'.

La formule (1) du 8.1.6 donne :

$$df(a) \cdot e_k = \sum_{i,j} (u_i \circ \partial_j f_i(a)) \cdot t_j(e_k).$$

On constate : $t_j(e_k) = \delta_{jk}$ (symbole de Kronecker), et donc :

$$df(a) \cdot e_k = \sum_i u_i \cdot (\partial_k f_i(a) \cdot 1).$$

Mais $$\partial_k f_i(a) \cdot 1 = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) \quad \text{et} \quad u_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_k} e'_i.$$

Ainsi : $$df(a) \cdot e_k = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)\, e'_i.$$

L'élément de la matrice jacobienne qui correspond à la ligne i et à la colonne k est $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)$. Autrement dit on a :

$$J_f(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{(i,j) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p}. \tag{1}$$

Remarque. — Soit $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p}$ la base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ associée aux bases e et e' de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ (n° 9.2.2 du tome I) par la convention :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_p \qquad \varepsilon_{ij}(e_k) = \delta_{jk}\, e'_i \qquad (\delta_{jk} : \text{symbole de Kronecker}).$$

On constate que (1) équivaut à l'égalité entre éléments de $\mathcal{L}(E, F)$:

$$df(a) = \sum_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\, \varepsilon_{ij}.$$

Cas particulier. — Si $q = 1$, il s'agit de la fonction numérique de p variables :

$$(x_1, \ldots, x_p) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_p).$$

Si elle est différentiable en a, on a :

$$J_f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right] \quad \text{et} \quad df(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, e_j^*$$

($\boldsymbol{\varepsilon}$ étant ici la base de E^* duale de e). Autrement dit :

$$df(a) : (h_1, \ldots, h_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

EXEMPLE. — Pour une fonction numérique de p variables, le théorème des accroissements finis (8.1.*3*, 2°) prend la forme (les hypothèses restant les mêmes) :

$$f(a_1+h_1, \dots, a_p+h_p) - f(a_1, \dots, a_p) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1+\theta h_1, \dots, a_p+\theta h_p).$$

3° ***Rang d'une application.*** — DÉFINITION. — **Soit $f = (f_1, \dots, f_q)$ une application différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. On appelle rang de f au point $a \in U$ le rang r de l'application linéaire** $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

Notons qu'il s'agit du rang de la matrice jacobienne $J_f(a)$, et aussi du rang du système de formes linéaires $(\mathrm{d}f_1(a), \dots, \mathrm{d}f_q(a))$. Il est au plus égal à min (q, p), ce qui permet de compléter la définition précédente par :

Selon que $r <$ min (q, p) **ou** $r =$ min (q, p), **on dit que** a **est un** *point critique* **de** f **ou que** a **est un** *point régulier* **de** f **(et alors que** f **est** *régulière* **en** a**).**

En particulier, dans le cas d'une fonction numérique de p variables ($q = 1$), a est point critique si et seulement si $\mathrm{d}f(a) = 0$, ce qui s'écrit :

$$\forall j \in \mathbb{N}_p \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$$

• PROPOSITION. — **Soit f une application continûment différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Si le rang de f au point $a \in U$ est r, alors il existe un voisinage ouvert de a dans U en tout point duquel le rang de f est au moins r.**

En effet il existe un déterminant d'ordre r, non nul, $D(a)$, extrait de $J_f(a)$. Le déterminant $D(x)$ extrait de $J_f(x)$, et faisant intervenir les mêmes lignes et les mêmes colonnes que $D(a)$ est — par continuité — non nul pour x assez voisin de a. □

Avec les notations de la proposition, on a immédiatement :

COROLLAIRE I. — **Si f est régulière en $a \in U$, alors il existe un voisinage ouvert de a dans U sur lequel f est régulière.**

COROLLAIRE II. — **L'ensemble des points de U en lequel f est régulière est un ouvert de U.**

COROLLAIRE III. — **Si $\mathrm{d}f(a)$ est injective (resp. surjective), alors il existe un voisinage ouvert de a dans U sur lequel f est une immersion (resp. une submersion) au sens du 8.1.*1*,** 9°.

4° ***Jacobien.*** — Si $p = q$, on peut considérer $\mathrm{d}f(a)$ comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ et parler de son déterminant ; celui-ci, qui est aussi le déterminant de la matrice carrée $J_f(a)$, est appelé *jacobien* ou *déterminant fonctionnel* de f au point a ; on le note

$$\frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}(a).$$

5° ***Composition des fonctions numériques.*** — Soient des applications :

$$f : U \to \mathbb{R}^q \qquad (x_1, \dots, x_p) \longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p))$$
$$g : V \to \mathbb{R}^m \qquad (y_1, \dots, y_q) \longmapsto (g_1(y_1, \dots, y_q), \dots, g_m(y_1, \dots, y_q))$$

où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^q$ tel que $f(U) \subset V$. On dispose ainsi de l'application composée $g \circ f$, qui sera notée :

$$g^* : U \to \mathbb{R}^m \qquad (x_1, \dots, x_p) \longmapsto (g_1^*(x_1, \dots, x_p), \dots, g_m^*(x_1, \dots, x_p)).$$

Nous supposons que f est différentiable au point a de U et que g est différentiable au point $b = f(a)$ de V.

Nous savons que g^* est différentiable en a et que : $\mathrm{d}g^*(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a)$.

Matriciellement, ceci se traduit par l'égalité entre matrices jacobiennes :

$$\underbrace{J_{g^*}(a)}_{(m,\,p)} = \underbrace{J_g(b)}_{(m,\,q)}\ \underbrace{J_f(a)}_{(q,\,p)}$$

qui s'écrit :

$$\left[\frac{\partial g_k^*}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_p)\right] = \left[\frac{\partial g_k}{\partial y_i}(b_1, \ldots, b_q)\right]\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_p)\right]$$

(où i, j, k décrivent respectivement $\mathbb{N}_p$, $\mathbb{N}_q$, $\mathbb{N}_m$).

En explicitant, on obtient les *mp égalités entre dérivées partielles* :

$$\boxed{\frac{\partial g_k^*}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_p) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(b_1, \ldots, b_q)\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_p)} \qquad (2)$$

Remarques. — *a*) Les composantes $g_1, \ldots, g_m$ de g intervenant séparément, nous aurions pu nous limiter au cas $m = 1$, ce que nous ferons par la suite.

b) Si on suppose seulement que f admet des dérivées partielles en a (g restant différentiable en $b = f(a)$), le lecteur vérifiera l'existence des $\frac{\partial g_k^*}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_p)$, et il constatera que les mp égalités (2) restant valables.

6° *Invariance de la différentielle.* — Nous conservons les notations du 5°, en nous limitant à $m = 1$. En utilisant les notations du **8**.1.5. 4°, nous avons :

$$\mathrm{d}g^*(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g^*}{\partial x_j}(a)\,\mathrm{d}x_j(a)$$

qui est une décomposition de $\mathrm{d}g^*(a)$ dans la base canonique de $(\mathbb{R}^p)^*$ qui sera notée $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_p)$.

Or
$$\frac{\partial g^*}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

d'où :

$$\mathrm{d}g^*(a) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)\mathrm{d}x_j = \sum_{i=1}^{q}\left[\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\,\mathrm{d}x_j\right]$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{d}g^*(a) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\,\mathrm{d}f_i(a).$$

En comparant à $\mathrm{d}g(b) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\,\mathrm{d}y_i(b)$, on déduit la règle pratique suivante (les hypothèses de différentiabilité étant supposées satisfaites) :

Soit g une fonction différentiable de q variables réelles ; l'écriture

$$\mathrm{d}g = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_i}(z_1, \ldots, z_q)\,\mathrm{d}z_i$$

est valable aussi bien[1] *si* $z_1, ..., z_q$ *désignent les variables que si* $z_1, ..., z_q$ *désignent des fonctions différentiables des variables* $x_1, ..., x_p$.

L'invariance de la différentielle intervient dans les questions de changement de variable (cf. **8**.5.*6*).

8.1.*8*. Intégrales dépendant d'un paramètre

Pour terminer ce premier sous-chapitre du chapitre **8**, *nous allons traiter une question qui touche à la fois au calcul intégral et au calcul différentiel. On en trouvera d'ailleurs un prolongement au tome IV.*

1° *Continuité.* — Théorème. — **Soient** $S = [a, b]$, **un segment de** $\mathbb{R}$, E **un espace topologique,** F **un espace de Banach, et enfin**

$$f : S \times E \to F \qquad (t, x) \longmapsto f(t, x)$$

une application continue. Alors l'application

$$\Phi : E \to F \qquad x \longmapsto \int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t$$

est continue.

L'existence de Φ tient à ce que, pour $x \in E$ donné, $t \longmapsto f(t, x)$ est une application continue, et donc intégrable, de S dans F. Nous nous proposons de prouver que Φ est continue au point donné $x_0 \in E$.

— Montrons d'abord que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un voisinage V de x_0 dans E tel que :

$$\forall (t, x) \in S \times V \qquad \|f(t, x) - f(t, x_0)\| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $u \in S$, la continuité de f au point (u, x_0) permet d'associer à ε un voisinage ouvert W_u de u dans $\mathbb{R}$ et un voisinage V_u de x_0 dans E tels que :

$$\forall (t, x) \in (S \cap W_u) \times V_u \qquad \|f(t, x) - f(u, x_0)\| \leqslant \varepsilon/2$$

En particulier : $$\forall t \in (S \cap W_u) \qquad \|f(t, x_0) - f(u, x_0)\| \leqslant \varepsilon/2$$

et donc, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\forall (t, x) \in (S \cap W_u) \times V_u \qquad \|f(t, x) - f(t, x_0)\| \leqslant \varepsilon$$

Le compact S peut être recouvert au moyen d'un nombre fini d'ouverts

---

[1] On fait ici l'abus de notation suivant : si $z_1, ..., z_q$ sont des variables, $\mathrm{d}z_i$ est mis pour $\mathrm{d}z_i(z)$ et $\mathrm{d}g$ pour $\mathrm{d}g(z)$. Si ce sont des fonctions de x, $\mathrm{d}z_i$ est mis pour $\mathrm{d}z_i(x)$ et $\mathrm{d}g$ pour $\mathrm{d}g^*(x)$. Dans les usages *pratiques* qui sont faits de cette écriture, cet abus de notation ne présente aucun risque.

W_u, que nous désignons par $W_{u_1}, \ldots, W_{u_n}$. Nous constatons que $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{u_i}$ est un voisinage de x_0 dans E. Pour $(t, x) \in S \times V$, il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $t \in W_{u_k}$; on a visiblement $x \in V_{u_k}$; on en déduit (1).

— En utilisant $\|\Phi(x)-\Phi(x_0)\| \leqslant \int_a^b \|f(t, x)-f(t, x_0)\| \, dt$, on constate qu'à tout $\varepsilon \in R_+^*$ on a pu associer un voisinage V de x_0 dans E tel que :

$$\forall x \in V \qquad \|\Phi(x)-\Phi(x_0)\| \leqslant \varepsilon(b-a). \qquad \square$$

REMARQUE. — Dans le cas où E est un espace métrique localement compact (par exemple $\mathbb{R}^n$), on peut démontrer (1) par des propriétés de continuité uniforme.

2° ***Dérivabilité.*** — L'espace topologique E est ici un intervalle J de $\mathbb{R}$. Soit $f : S \times J \to F$ une application continue, notée $(t, x) \longmapsto f(t, x)$. Nous ne disposons, pour le moment, que de la notion de dérivée partielle de f par rapport à x *en un point de l'ouvert* $\overset{\frown}{S \times J}$. Nous avons ici besoin d'étendre cette notion à $S \times J$. C'est possible, en convenant que :

Pour tout $(t_0, x_0) \in S \times J$, $f'_x(t_0, x_0)$ désigne — *sous réserve de son existence* — la dérivée au point $x_0 \in J$ de l'application $x \longmapsto f(t_0, x)$ de J dans F, à savoir

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in J \setminus \{x_0\}} \frac{f(t_0, x)-f(t_0, x_0)}{x-x_0}.$$

Dans ces conditions, nous allons démontrer :

THÉORÈME. — **Soient $S = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, J un intervalle de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach, et enfin**

$$f : S \times J \to F \qquad (t, x) \longmapsto f(t, x)$$

une application continue, telle que la dérivée partielle f'_x existe et soit continue sur $S \times J$. Alors l'application

$$\Phi : J \to F \qquad x \longmapsto \int_a^b f(t, x) \, dt$$

est continûment dérivable, et, pour tout $x \in J$: $\Phi'(x) = \int_a^b f'_x(t, x) \, dt$.

(On dit que Φ' s'obtient en dérivant sous le signe $\int$).

— Nous allons montrer que Φ est dérivable au point donné $x_0 \in J$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On peut reprendre pour la fonction continue f'_x le calcul fait sur f au 1° : il existe ici un intervalle V de $\mathbb{R}$, voisinage ouvert de x_0 dans l'espace topologique J, tel que :

$$\forall (t, x) \in S \times V \qquad \|f'_x(t, x) - f'_x(t, x_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que, $t \in S$ étant fixé, l'application

$$g : V \to F \qquad x \longmapsto f(t, x) - (x - x_0) f'_x(t, x_0)$$

admet, en tout $x \in V$, une dérivée $g'(x)$ telle que $\|g'(x)\| \leqslant \varepsilon$.

Pour tout $(t, x_0 + h) \in S \times V$, on a donc, en appliquant à g la formule des accroissements finis entre x_0 et $x_0 + h$:

$$\|f(t, x_0 + h) - f(t, x_0) - h f'_x(t, x_0)\| \leqslant \varepsilon |h|.$$

En intégrant sur $[a, b]$, on en déduit :

$$\left\| \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - h \int_a^b f'_x(t, x_0)\, \mathrm{d}t \right\| \leqslant \varepsilon (b - a)\, |h|$$

ce qui permet d'affirmer que Φ admet $h \longmapsto h \int_a^b f'_x(t, x_0)\, \mathrm{d}t$ pour application différentielle et donc $\int_a^b f'_x(t, x_0)\, \mathrm{d}t$ pour dérivée au point x_0.

La continuité de Φ' résulte de celle de f'_x, d'après le 1° □

REMARQUE. — On peut remplacer l'hypothèse : *f est continue sur $S \times J$* par l'hypothèse plus faible : *pour tout $x \in J$, l'application $t \longmapsto f(t, x)$ est continue sur S.*

EXEMPLES. — *a*) Soit $\Phi(x) = \int_1^2 t^x \,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$.

Un calcul direct donne $\Phi(x) = \dfrac{1}{x+1}(2^{x+1} - 1)$ pour $x \neq -1$ et $\Phi(-1) = \ln 2$.

Ici $S = [1, 2]$, $J = \mathbb{R}$, $f(t, x) = e^{x \ln t}$, $f'_x(t, x) = t^x \ln t$.

La fonction f'_x est continue sur $S \times J$. On déduit du théorème :

$$\forall x \neq -1 \qquad \int_1^2 t^x \ln t \,\mathrm{d}t = \frac{2^{x+1} \ln 2}{x+1} - \frac{2^{x+1} - 1}{(x+1)^2}.$$

b) Soit $\Phi_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Φ_n est définie sur $\mathbb{R}^*$. La parité permet de l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\Phi'_n(x) = \int_0^1 \frac{-2nx \,\mathrm{d}t}{(t^2 + x^2)^{n+1}} = -2nx\Phi_{n+1}(x).$$

D'où un calcul de proche en proche, au moyen de :

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{x} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x}; \quad \Phi_n(x) = \frac{-1}{2(n-1)x} \Phi'_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

PROPOSITION. — **Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach, et $f : (t, x) \longmapsto f(t, x)$ une application continue de**

$I \times U$ dans F telle que f'_x existe et soit continue sur $I \times U$. Alors l'application

$$\Psi : I \times I \times U \to F \qquad (u, v, x) \longmapsto \int_u^v f(t, x)\,\mathrm{d}t$$

est différentiable sur $I \times I \times U$.

Le théorème précédent fournit l'*existence* en tout $(u, v, x) \in I \times I \times U$ de la dérivée partielle

$$\Psi'_x(u, v, x) = \int_u^v f'_x(t, x)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs on dispose des dérivées partielles au point (u, v, x) :

$$\Psi'_u(u, v, x) = -f(u, x)\,; \quad \Psi'_v(u, v, x) = f(v, x).$$

On constate que Ψ'_u et Ψ'_v sont des applications *continues* sur $I \times I \times U$. La proposition résulte du théorème II et de la remarque du 8.1.5. □

Corollaire. — **Aux hypothèses de la proposition précédente on adjoint l'existence de deux applications dérivables, α et β, de U dans I. Alors l'application :**

$$G : U \to F \qquad x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable et

$$G'(x) = -f(\alpha(x), x)\,\alpha'(x) + f(\beta(x), x)\,\beta'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(t, x)\,\mathrm{d}t.$$

On constate $G = \Psi \circ \theta$, avec $\theta : U \to I \times I \times U \quad x \longmapsto (\alpha(x),\ \beta(x),\ x)$. La dérivabilité de G est assurée (8.1.2, 2°) par la différentiabilité de Ψ (proposition précédente) et par la dérivabilité de θ ; on a :

$G'(x) = \mathrm{d}\Psi(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$, ce qui s'écrit :

$$G'(x) = \Psi'_u(\theta(x))\,\alpha'(x) + \Psi'_v(\theta(x))\,\beta'(x) + \Psi'_x(\theta(x)).$$ □

Remarque. — Le corollaire s'étend au cas où I et U sont des intervalles quelconques. Soient, par exemple : $I = [a, b[$, et $U = [c, d[$. On adjoint :

$$I' =]a', b[, \text{ et } U' =]c', d[,$$

avec $a' < a$ et $c' < c$.

On prolonge f en $\hat{f} : I' \times U' \to F$ en convenant que :

— si $t < a$ et $x \in U$, $\quad \hat{f}(t, x) = f(a, x)$;

— si $t \in I$ et $x < c$, $\quad \hat{f}(t, x) = f(t, c) + (x-c) f'_x(t, c)$;

— si $t < a$ et $x < c$, $\quad \hat{f}(t, x) = f(a, c) + (x-c) f'_x(a, c)$.

On prolonge α en $\widehat{\alpha} : U' \to I'$ en convenant que :

— si $x < c$, $\widehat{\alpha}(x) = \alpha(c) + (x-c)\,\alpha'(c)$.

(C'est possible pourvu que, $c - c'$ soit assez petit). On opère de même avec β.

Le lecteur vérifiera que l'on dispose ainsi de la dérivabilité de :

$$\hat{G} : U' \to F \qquad x \longmapsto \int_{\widehat{\alpha(x)}}^{\widehat{\beta(x)}} \hat{f}(t, x)\, \mathrm{d}t$$

et il terminera la démonstration.

3° **Interversion des intégrations.** — Nous allons étudier un cas particulier du théorème de Fubini (IV.7.1.1, 5°). — THÉORÈME. — **Soient** $S = [a, b]$ **et** $I = [c, d]$ **deux segments de** $\mathbb{R}$, F **un espace de Banach,** $f : S \times I \to F$ **une application continue. Alors :**

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t, x)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

Considérons les deux applications définies sur I par :

$$\varphi(y) = \int_c^y \left(\int_a^b f(t, x)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x\, ; \qquad \psi(y) = \int_a^b \left(\int_c^y f(t, x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

Comme f est continue sur $S \times I$, $x \longmapsto \int_a^b f(t, x)\, \mathrm{d}t$ est continue sur I (cf. 1°), et donc φ est de classe C^1 sur I, de dérivée $y \longmapsto \int_a^b f(t, y)\, \mathrm{d}t$.

Posant $H(t, y) = \int_c^y f(t, x)\, \mathrm{d}x$, on a $\psi(y) = \int_a^b H(t, y)\, \mathrm{d}t$. On constate :

$$\|H(t, y) - H(t_0, y_0)\| \leqslant M|y - y_0| + \|H(t, y_0) - H(t_0, y_0)\|,$$

avec $M = \sup\limits_{(t, x) \in S \times I} \|f(t, x)\|$. On montre successivement la continuité de $t \longmapsto H(t, y_0)$ en tout $t_0 \in S$, puis celle de H en tout $(t_0, y_0) \in S \times I$. Pour tout $(t_0, y_0) \in S \times I$, on constate qu'existe la dérivée partielle $H'_y(t_0, y_0) = f(t_0, y_0)$; H'_y est donc continue sur $S \times I$. On en déduit que ψ est de classe C^1 sur I, de dérivée $y \mapsto \int_a^b f(t, y)\, \mathrm{d}t$.

Ainsi φ et ψ vérifient $\varphi(c) = \psi(c)$ et ont même dérivée sur $[c, d]$. On en déduit qu'elles coïncident sur $[c, d]$ et que $\varphi(d) = \psi(d)$. □

REMARQUE. — $\int_c^d \left(\int_a^b f(t, x)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$ s'écrit $\int_c^d \mathrm{d}x \int_a^b f(t, x)\, \mathrm{d}t$.

EXERCICE. — *Calculer* $\mathfrak{J} = \int_0^\pi \ln \frac{b - \cos t}{a - \cos t}\, \mathrm{d}t$, $(1 < a < b)$.

On constate $\mathfrak{J} = \int_0^\pi \mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x - \cos t}$. On a donc

$$\mathfrak{J} = \int_a^b \mathrm{d}x \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{x - \cos t} = \int_a^b \frac{\pi\, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \pi \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}$$

8.2. DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

8.2.1. Notion d'application n fois différentiable

1° ***Application n fois différentiable sur un ouvert.*** — Soient E et F deux e.v.n., et f une application d'un ouvert U de E dans F.

a) On suppose que f est différentiable sur U ; on dispose donc de : $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$; *si* df *est différentiable sur* U *on dit que* f *est* 2 *fois différentiable sur* U ; on dispose alors de $d(df) : U \to \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ que l'on note d^2f et que l'on appelle *différentielle d'ordre* 2 (ou différentielle seconde) de f sur U ; si, en outre, d^2f est continue sur U, on dit que f est *de classe* C^2 *sur* U.

b) Pour généraliser, on commence par définir par récurrence la suite $(\mathcal{L}^n(E, F))_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'e.v.n. tels que :

$$\mathcal{L}^1(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \;; \quad \text{pour } n \geqslant 2,\ \mathcal{L}^n(E, F) = \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{n-1}(E, F))$$

D'après **3**.1.*4*, 6° on obtient, pour n donné, une isométrie canonique (isomorphisme algébrique conservant la norme) de $\mathcal{L}^n(E, F)$ sur $\mathcal{L}_n(E, F)$ en associant à l'application linéaire continue v de E dans $\mathcal{L}^{n-1}(E, F)$ l'application n-linéaire continue u de E^n dans F définie par :

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

($v \cdot x_1 \cdot x_2$ est l'image de $x_2 \in E$ par $v \cdot x_1 \in \mathcal{L}^{n-1}(E, F)$, et ainsi de suite). On peut alors, par récurrence, donner un sens, pour $n \in \mathbb{N}^*$, au couple d'expressions :

« f est n fois différentiable (resp. de classe C^n) sur U »,
« $d^nf : U \to \mathcal{L}^n(E, F)$ est la différentielle d'ordre n de f sur U ».

Il suffit, pour cela, de poser (pour $n \geqslant 2$) :

DÉFINITION. — **On dit que f est n fois différentiable (resp. de classe C^n) sur U si, et seulement si les conditions suivantes sont remplies :**

(*i*) f **est** $n-1$ **fois différentiable sur** U,

(*ii*) $d^{n-1}f : U \to \mathcal{L}^{n-1}(E, F)$ **est différentiable (resp. de classe** C^1**) sur** U. **Lorsqu'il en est ainsi** $d(d^{n-1}f)$ **se note** d^nf.

• En convenant de dire qu'une application continue est de classe C^0 et de noter d^0f pour f, et en tenant compte de ce qu'une application différentiable est continue, on démontre aisément :

PROPOSITION. — α) **Si f est n fois différentiable sur U alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant m \leqslant n-1$, f est de classe C^m, d^mf est $(n-m)$ fois différentiable sur U et $d^nf = d^{n-m}(d^mf)$.**

β) **Si f est n fois différentiable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors elle est de classe C^n sur U pour tout $n \in \mathbb{N}$; on dit qu'elle est de classe C^∞ sur U.**

EXEMPLES. — Reprenant des résultats du **8**.1.*1*, 8° et du **8**.1.*5*, 5°, on constate que f est C^∞ sur U dans les cas suivants :

a) f est constante. On a alors $d^nf = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

b) f est la restriction d'une application linéaire (resp. affine) continue. Alors $\mathrm{d}f$ est constante ;
c) f est bilinéaire continue. Alors $\mathrm{d}f$ est linéaire et continue.

2° ***Applications n fois différentiable en un point.*** — On dit que $f : U \to F$ est *n fois différentiable au point* $a \in U$ si, et seulement s'il existe un ouvert U' de E tel que $\{a\} \subset U' \subset U$, que la restriction de f à U' soit $(n-1)$ fois différentiable sur U', et qu'enfin $\mathrm{d}^{n-1}(f|_{U'})$ soit différentiable en a.

Par abus de langage, la différentielle en a de $\mathrm{d}^{n-1}(f|U')$ se note alors $\mathrm{d}^n f(a)$ et s'appelle *différentielle d'ordre n de f* au point a ; le lecteur vérifiera qu'il s'agit d'un élément de $\mathcal{L}^n(E, F)$ qui ne dépend pas de U'.

La norme de $\mathrm{d}^n f(a)$ est celle de l'application n-linéaire associée, soit :

$$\|\mathrm{d}^n f(a)\| = \sup_{h_i \neq 0_E} \frac{\|\mathrm{d}^n f(a)\cdot h_1 \cdot \ldots \cdot h_n\|}{\|h_1\| \ldots \|h_n\|}.$$

3° ***Un résultat important.*** — Théorème I. — **Soient** $f : U \to F$ **deux fois différentiable en** a, **et** $k \in E$. **Alors l'application** $g : x \longmapsto \mathrm{d}f(x)\cdot k$ **est différentiable en** a **et**

$$\forall h \in E \qquad \mathrm{d}g(a)\cdot h = \mathrm{d}^2 f(a)\cdot h \cdot k.$$

D'après le 2°, g est définie sur un voisinage $U' \subset U$ de a, et prend ses valeurs dans F. On peut écrire $g = u \circ \mathrm{d}f$ avec $u : \mathcal{L}(E, F) \to F \ v \longmapsto v\cdot k$.

Linéaire et continue, u est sa propre différentielle en tout point de $\mathcal{L}(E, F)$; la différentiabilité de $\mathrm{d}f$ en a entraîne donc celle de g ; on a

$$\mathrm{d}g(a) = u \circ \mathrm{d}^2 f(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}g(a)\cdot h = u(\mathrm{d}^2 f(a)\cdot h). \qquad \square$$

Théorème II. — **Soient** $f : U \to F$, m **fois différentiable en** a, **et**

$$(h_3, \ldots, h_m) \in E^{m-2}.$$

Alors l'application $g : x \longmapsto \mathrm{d}^{m-2} f(x)\cdot h_3 \cdot \ldots \cdot h_m$ **est deux fois différentiable en** a **et**

i) $\forall h_2 \in E \qquad \mathrm{d}g(a)\cdot h_2 = \mathrm{d}^{m-1} f(a)\cdot h_2 \cdot h_3 \cdot \ldots \cdot h_m$

ii) $\forall (h_1, h_2) \in E^2 \qquad \mathrm{d}^2 g(a)\cdot h_1 \cdot h_2 = \mathrm{d}^m f(a)\cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot \ldots \cdot h_m.$

On raisonne comme ci-dessus, d'abord en ce qui concerne g, puis en ce qui concerne chacune des applications égales au voisinage de a :

$$x \longmapsto \mathrm{d}g(x)\cdot h_2 \quad \text{et} \quad x \longmapsto \mathrm{d}^{m-1} f(x)\cdot h_2 \cdot h_3 \cdot \ldots \cdot h_m.$$

8.2.2. Propriétés des applications n fois différentiables

1° ***Linéarité de la différentiation d'ordre n.*** — En raisonnant par récurrence, on étend sans difficulté les deux propositions du **8.1.4**, 3° :

— *L'ensemble des applications* $U \to F$ *n fois différentiables en* $a \in U$ *est un espace vectoriel* ; $f \longmapsto \mathrm{d}^n f(a)$ *est une application linéaire de cet espace dans* $\mathcal{L}^n(E, F)$.

— *L'ensemble des applications* $U \to F$ *de classe* C^n *est un espace vectoriel* ; $f \longmapsto \mathrm{d}^n f$ *est une application linéaire de cet espace dans* $\mathcal{F}(U, \mathcal{L}^n(E, F))$.

2° *Applications à valeurs dans un produit ; application composée.* — Nous allons montrer par récurrence que sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$ les assertions suivantes, dans lesquelles il s'agit d'applications d'un ouvert d'un e.v.n. dans un e.v.n. ou un produit d'e.v.n.

PROPOSITION $\mathcal{T}_n$. — **L'application $f : x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_q(x))$ est de classe C^n si, et seulement si chacune des applications composantes est de classe C^n.**

PROPOSITION $\mathcal{Q}_n$. — **La composée de deux applications de classe C^n est elle-même de classe C^n.**

— $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{Q}_0$ sont des propriétés des applications continues.

— Avant d'aller plus loin, remarquons que si $\mathcal{Q}_n$ est vraie, alors $\mathcal{T}_n$ est vraie, ainsi que cela résulte (pour $n \geqslant 1$) de la possibilité d'écrire (**8**.1.*4*, 2°) :

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{q} U_i \circ \mathrm{d}f_i \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f_i = S_i \circ \mathrm{d}f, \quad (1 \leqslant i \leqslant q)$$

où les U_i et les S_i sont linéaires et continues, et donc de classe C^∞.

— Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{Q}_{m-1}$ (et donc $\mathcal{T}_{m-1}$) est vraie et on considère les applications, de classe C^m, $f : U \rightarrow F$ et $g : V \rightarrow G$ avec $f(U) \subset V$ (notations du **8**.1.2). On dispose ainsi de $g \circ f : U \rightarrow G$. Comme f et g sont différentiables sur U, il en est de même de $g \circ f$. Il s'agit donc de vérifier que :

$$\mathrm{d}(g \circ f) : U \rightarrow \mathcal{L}(E, G) \qquad x \longmapsto \mathrm{d}g(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x)$$

est de classe C^{m-1}. Ecrivons $\mathrm{d}(g \circ f) = \psi \circ \varphi$, avec

$$\psi : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G) \qquad (l, \lambda) \longmapsto \lambda \circ l$$
$$\varphi : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \qquad x \longmapsto (\mathrm{d}f(x), \mathrm{d}g(f(x)))$$

L'application ψ, bilinéaire et continue, est de classe C^∞ (**8**.*2*.1, 1°). Compte tenu de $\mathcal{Q}_{m-1}$, il suffit donc de vérifier que φ est de classe C^{m-1}, ou encore — compte tenu de $\mathcal{T}_{m-1}$ — que chacune des composantes de φ, à savoir $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}g \circ f$ est de classe C^{m-1} ; or f et g étant de classe C^m, $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}g$ — et d'ailleurs aussi f — sont de classe C^{m-1} ; il suffit d'utiliser $\mathcal{Q}_{m-1}$. □

3° *Produit.* — Une application bilinéaire et continue étant de classe C^∞, on démontre, en utilisant les propositions qui précèdent et en raisonnant comme au **8**.1.*5*, 6° :

PROPOSITION. — **Soient f_1 et f_2 deux applications de classe C^n d'un ouvert d'un e.v.n. dans des e.v.n. F_1 et F_2, et u une application bilinéaire et continue de $F_1 \times F_2$ dans un e.v.n. Alors l'application $x \longmapsto u(f_1(x), f_2(x))$ est de classe C^n.**

REMARQUE. — Dans les propositions du 1°, du 2° et du 3° on peut remplacer *de classe* C^n par n fois *différentiable sur un ouvert* (resp. en un point).

4° *Applications définies sur un produit ; différentielles partielles d'ordre supérieur.* — *a*) Soit f une application d'un ouvert U d'un e.v.n. produit $E = \prod_{j=1}^{p} E_j$ dans un e.v.n. F. Nous avons vu (**8**.1.*5*, 2°) que f est de

classe C^1 sur U si et seulement si les p différentielles partielles $\partial_j f$ existent et sont continues sur U. On a alors :

$$\mathrm{d}f = \sum_j T_j \circ \partial_j f \quad \text{et} \quad \partial_j f = V_j \circ \mathrm{d}f, \quad (1 \leqslant j \leqslant p)$$

où les T_j et les V_j sont linéaires continues, et donc de classe C^∞. Il en résulte que f est de classe C^2 sur U si et seulement si les $\partial_j f$ sont de classe C^1 sur U. Introduisant les applications :

$$\partial_i \partial_j f = \partial_i(\partial_j f) : U \to \mathfrak{L}(E_i, \mathfrak{L}(E_j, F)) \quad ((i, j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_p)$$

qui sont appelées *différentielles partielles d'ordre 2 de f sur U*, nous pouvons dire que *f est de classe C^2 sur U si, et seulement si les p^2 applications $\partial_i \partial_j f$ existent et sont continues sur U.*

On convient d'écrire $\partial_j^2 f$ pour $\partial_j \partial_j f$.

Plus généralement, *f est de classe C^n sur U* si et seulement si les $\partial_j f$ sont de classe C^{n-1} sur U, c'est-à-dire *si et seulement si les p^n différentielles partielles d'ordre n de f sur U*, définies par les relations de récurrence

$$\partial_{j_n} \partial_{j_{n-1}} \ldots \partial_{j_1} f = \partial_{j_n}(\partial_{j_{n-1}} \ldots \partial_{j_1} f)$$

existent et sont continues sur U.

b) Supposons que $\mathrm{d}^2 f(a)$ existe, ce qui implique l'existence de $\mathrm{d}f$ et des $\partial_j f$, sur un voisinage ouvert U' de a, et l'existence des $\partial_i \partial_j f(a)$.

Pour tout $x \in U'$ et $(k_1, \ldots, k_p) \in E$, nous avons :

$$\mathrm{d}f(x) \cdot (k_1, \ldots, k_p) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(x) \cdot k_j. \tag{1}$$

En travaillant sur $\mathrm{d}f$ (au lieu de f), et en nous limitant à $x = a$, nous avons de même, pout tout $(h_1, \ldots, h_p) \in E$:

$$\mathrm{d}^2 f(a) \cdot (h_1, \ldots, h_p) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i(\mathrm{d}f)(a) \cdot h_i \tag{2}$$

et donc, pour tous $(h_1, \ldots, h_p) \in E$ et $(k_1, \ldots, k_p) \in E$:

$$\mathrm{d}^2 f(a) \cdot (h_1, \ldots, h_p) \cdot (k_1, \ldots, k_p) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i(\mathrm{d}f)(a) \cdot h_i \cdot (k_1, \ldots, k_p).$$

Appliquons le théorème I du 8.2.*1*, 3° — qui est naturellement valable pour les différentielles partielles — aux applications (qui interviennent dans (1)) :

$$x \longmapsto \mathrm{d}f(x) \cdot (k_1, \ldots, k_p) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \partial_j f(x) \cdot k_j, \qquad (j \in \mathbb{N}_p)$$

Chacune d'elles a ainsi une i-ième différentielle partielle en a, a savoir :

$$h_i \longmapsto \partial_i(\mathrm{d}f)(a).h_i.(k_1, \ldots, k_p) \qquad \text{et} \qquad h_i \mapsto \partial_i \partial_j f(a).h_i.k_j.$$

Compte tenu de (1) ,on en déduit une nouvelle forme du second membre de (2), et donc :

$$d^2f(a)\cdot(h_1, ..., h_p)\cdot(k_1, ..., k_p) = \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}_p)^2} \partial_i\partial_j f(a)\cdot h_i\cdot k_j \qquad (3)$$

qui généralise (1).

Plus généralement, on démontre par récurrence que si $d^nf(a)$ existe, alors pour tous $\boldsymbol{h}_1 = (h_{1,1}, ..., h_{1,p}), ... \boldsymbol{h}_n = (h_{n,1}, ..., h_{n,p})$ dans E :

$$d^nf(a)\cdot\boldsymbol{h}_1\cdot ...\cdot\boldsymbol{h}_n = \sum_j \partial_{j(1)}...\partial_{j(n)}f(a)\cdot h_{1,j(1)}\cdot ...\cdot h_{n,j(n)} \qquad (4)$$

où j décrit l'ensemble des applications de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$.

5° *Dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction de plusieurs variables réelles.* — Reprenons les notations du 4°, avec ici $E = \mathbb{R}^p$ et :

$$f : (x_1, ..., x_p) \longmapsto f(x_1, ..., x_p).$$

a) Nous disposons (8.1.5, 3°) de la notion de dérivées partielles de f. D'où la possibilité d'introduire des dérivées partielles d'ordre 2. On désigne la i-ième dérivée partielle de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ au point a par $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, et aussi ([1]) par $f''_{x_ix_j}(a)$; son existence équivaut à celle de la i-ième différentielle partielle de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ en a, et donc à celle de $\partial_i\partial_j f(a)$. Lorsqu'elle est acquise on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \partial_i \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\cdot 1.$$

En remarquant que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ s'écrit $x \longmapsto \partial_j f(x)\cdot 1$, et en utilisant le théorème I du 8.2.1, 3° — qui s'étend évidemment aux différentielles partielles — on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \partial_i\partial_j f(a)\cdot 1\cdot 1. \qquad (5)$$

Inversement, $\partial_i\partial_j f(a)$ s'exprime au moyen de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ par

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \qquad \partial_i\partial_j f(a)\cdot h\cdot k = hk\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a). \qquad (6)$$

Plus généralement, on définit les dérivées partielles d'ordre n, et on constate

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n}...\partial x_{j_1}}(a) = \partial_{j_n}...\partial_{j_1} f(a)\cdot 1\cdot ...\cdot 1.$$

([1]) Certains auteurs la notent $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ et $f''_{x_jx_i}(a)$.

b) On en déduit que les formules (3) et (4) du 4° s'écrivent :

$$\mathrm{d}^2 f(a) \cdot (h_1, \ldots, h_p) \cdot (k_1, \ldots, k_p) = \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}_p)^2} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \tag{7}$$

et

$$\mathrm{d}^n f(a) \cdot \boldsymbol{h}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{h}_n = \sum_j h_{1, j(1)} \ldots h_{n, j(n)} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j(1)} \ldots \partial x_{j(n)}}(a). \tag{8}$$

REMARQUE. – Dans le cas $F = \mathbb{R}$, (7) montre que la forme bilinéaire symétrique associée à $\mathrm{d}^2 f(a)$ admet, dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, la matrice

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)\right]_{(i,j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_p}$$

8.2.3. Symétrie des différentielles d'ordre supérieur

En première lecture, les résultats de ce paragraphe pourront être admis.

1° *Cas de la différentielle seconde.* — THÉORÈME. — **Soient E et F deux e.v.n. et f une application d'un ouvert U de E dans F, deux fois différentiable au point $a \in U$. Alors pour tout $(h, k) \in E^2$ on a :**

$$\mathrm{d}^2 f(a) \cdot h \cdot k = \mathrm{d}^2 f(a) \cdot k \cdot h. \tag{1}$$

— Si $h = 0_E$ ou $k = 0_E$, les deux membres de (1) sont égaux à 0_F. Il suffit donc de prouver que pour tous h et k dans $E \backslash \{0\}$ et tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\|\mathrm{d}^2 f(a).h.k - \mathrm{d}^2 f(a).k.h\| \leqslant 2\varepsilon(\|h\| + \|k\|)^2 \tag{2}$$

(on passera ensuite à la limite avec h et k fixes et ε tend vers 0).

– Considérons donc un triplet $(h, k, \varepsilon) \in (E \backslash \{0\}) \times (E \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}_+^*$.

L'existence de $\mathrm{d}^2 f(a)$ impliquant celle de $\mathrm{d}f$ sur un voisinage de a, il existe une boule ouverte B de centre a, incluse dans U, sur laquelle f et $\mathrm{d}f$ sont définies, telle que, pour tout $a + x \in B$ on ait :

$$\|\mathrm{d}f(a + x) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a).x\| \leqslant \varepsilon \|x\| \tag{3}$$

Soit ρ le rayon de B. On peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que les vecteurs $s = \lambda h$ et $t = \lambda k$ vérifient $\|s\| < \rho/2$ et $\|t\| < \rho/2$, ce qui implique que $a + s$, $a + t$ et $a + s + t$ appartiennent à B. On remarque que vérifier (2) pour le triplet (h, k, ε) que nous avons considéré équivaut à vérifier :

$$\|\mathrm{d}^2 f(a).s.t - \mathrm{d}^2 f(a).t.s\| \leqslant 2\varepsilon(\|s\| + \|t\|)^2 \tag{4}$$

– Nous allons le faire en utilisant le vecteur de F

$$w = f(a + s + t) + f(a) - f(a + s) - f(a + t) - \mathrm{d}^2 f(a).s.t$$

Écrivons $w = g(t) - g(0_E)$:

en notant g l'application du segment $S = [0_E, t]$ dans F, définie par :

$$g(u) = f(a + s + u) - f(a + u) - \mathrm{d}^2 f(a).s.u$$

Quand u décrit S, les points $a + s + u$ et $a + u$ décrivent chacun un segment inclus dans B (qui est convexe), ce qui prouve l'existence de g ; comme, en outre $u \longmapsto \mathrm{d}^2 f(a).s.u$ est une application linéaire continue, g est différentiable en tout $u \in S$ et :

$$\mathrm{d}g(u) = \mathrm{d}f(a + s + u) - \mathrm{d}f(a + u) - \mathrm{d}^2 f(a).s$$

On constate aisément que $\mathrm{d}g(u) = l(u) - m(u)$, avec :

$$l(u) = \mathrm{d}f(a + s + u) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a).(s + u)$$

et

$$m(u) = \mathrm{d}f(a + u) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a).u$$

Comme $a + s + u \in B$, et $a + u \in B$, on peut appliquer deux fois (3), et écrire, pour tout $u \in S$:

$$\|\mathrm{d}g(u)\| \leqslant \varepsilon(\|s + u\| + \|u\|) \leqslant 2\varepsilon(\|s\| + \|t\|).$$

En utilisant **8**.1.*3*, 1°, on en déduit :

$$\|w\| \leqslant 2\varepsilon\|t\|.(\|s\| + \|t\|).$$

En transposant s et t on constate que le vecteur de F

$$w' = f(a + s + t) + f(a) - f(a + s) - f(a + t) - \mathrm{d}^2 f(a).t.s$$

vérifie :

$$\|w'\| \leqslant 2\varepsilon\|s\|(\|s\| + \|t\|).$$

Comme :

$$\mathrm{d}^2 f(a).s.t - \mathrm{d}^2 f(a).t.s = w' - w,$$

l'inégalité (4) en résulte : □

2° *Cas général.* — THÉORÈME. — **Si f est n fois différentiable au point $a \in U$, $n \geqslant 2$, alors, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout $(h_1, \ldots, h_n) \in E^n$, on a :**

$$\mathrm{d}^n f(a)\cdot h_1 \cdot \ldots \cdot h_n = \mathrm{d}^n f(a)\cdot h_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot h_{\sigma(n)}. \tag{5}$$

Il s'agit de vérifier par récurrence qu'une assertion $\mathcal{A}_n$ est vraie pour $n \geqslant 2$.

— Nous venons de voir que $\mathcal{A}_2$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Nous supposons que $\mathcal{A}_{n-1}$ est vraie. Nous considérons $f : U \to F$, n fois différentiable en $a \in U$, et $(h_1, \ldots, h_n) \in E^n$. Nous nous

référons au théorème II du 8.2.*1*, 3°. Utilisant d'abord :

$$g : x \longmapsto \mathrm{d}^{n-1}f(x)\cdot h_2\cdot h_3\cdot\ldots\cdot h_n$$

nous avons (d'après la partie *i*) du théorème) :

$$\mathrm{d}^n f(a)\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot\ldots\cdot h_n = \mathrm{d}g(a)\cdot h_1.$$

On en déduit que (5) est vraie pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(1) = 1$; en effet une telle permutation n'altère pas g, d'après $\mathcal{A}_{n-1}$.

Utilisant ensuite

$$g : x \longmapsto \mathrm{d}^{n-2}f(x)\cdot h_3\cdot\ldots\cdot h_n$$

nous avons (d'après la partie *ii*) du théorème) :

$$\mathrm{d}^n f(a)\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot\ldots\cdot h_n = \mathrm{d}^2 g(a)\cdot h_1\cdot h_2.$$

On en déduit que (5) est vraie pour la transposition qui échange 1 et 2; en effet, d'après $\mathcal{A}_2$, cette transposition n'altère pas le second membre de l'égalité précédente.

En conclusion (5) est vraie pour toute transposition qui échange deux éléments consécutifs de $\mathbb{N}_n$, et donc (I. 2.4.*2*, 3°) pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. □

3° ***Conclusion.*** — L'isométrie canonique du 3.1.*4*, 5° permet d'énoncer :

THÉORÈME. — **Si $f : U \to F$ est n fois différentiable au point $a \in U$, alors l'application n-linéaire associée à la différentielle $\mathrm{d}^n f(a)$ par l'isométrie canonique de $\mathcal{L}^n(E, F)$ sur $\mathcal{L}_n(E, F)$ est symétrique.**

8.2.*4*. Théorème de Schwarz

1° THÉORÈME I. — **Soit f une application d'un ouvert U d'un e.v.n. produit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ dans un e.v.n. F. Si f est deux fois différentiable au point $a \in U$, alors, pour tous (i, j) dans $(\mathbb{N}_p)^2$, h_i dans E_i et k_j dans E_j :**

$$\partial_i\partial_j f(a)\cdot h_i\cdot k_j = \partial_j\partial_i f(a)\cdot k_j\cdot h_i. \tag{1}$$

En utilisant $\mathrm{d}^2 f(a)\cdot \boldsymbol{h}\cdot \boldsymbol{k} = \mathrm{d}^2 f(a)\cdot \boldsymbol{k}\cdot \boldsymbol{h}$, la formule (3) du 8.2.*2*, 4° nous apprend que, pour tous $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_p)$ et $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_p)$ dans E, on a (i, j) décrivant $(\mathbb{N}_p)^2$:

$$\sum_{(i, j)} \partial_i\partial_j f(a)\cdot h_i\cdot k_j = \sum_{(i, j)} \partial_i\partial_j f(a)\cdot k_i\cdot h_j$$

et donc, après changement de l'indexation au second membre :

$$\sum_{(i,j)} \partial_i \partial_j f(a) \cdot h_i \cdot k_j = \sum_{(i,j)} \partial_j \partial_i f(a) \cdot k_j \cdot h_i$$

(1) n'est autre que cette égalité dans le cas où toutes les composantes de $\boldsymbol{h}$ différentes de h_i et toutes les composantes de $\boldsymbol{k}$ différentes de k_j sont nulles. □

On démontre de la même façon grâce à la formule (4) du **8.2.2**, 4°.

THÉORÈME II. — **Si f est n fois différentiable au point $a \in U$, alors pour tous**

$$j \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p), \ \sigma \in \mathfrak{S}_n, \ h_{j(1)} \in E_{j(1)}, \ \dots, \ h_{j(n)} \in E_{j(n)}$$

$$\partial_{j(1)} \dots \partial_{j(n)} f(a) \cdot h_{j(1)} \cdot \dots \cdot h_{j(n)} = \partial_{j\sigma(1)} \dots \partial_{j\sigma(n)} f(a) \cdot h_{j\sigma(1)} \cdot \dots \cdot h_{j\sigma(n)}. \qquad (2)$$

2° ***Cas d'une fonction de plusieurs variables réelles.*** — Ici $E = \mathbb{R}^p$ et $E_j = \mathbb{R}$ pour tout $j \in \mathbb{N}_p$. Il suffit de se reporter aux formules (5) et (6) du **8.2.2**, 5° et de faire $h_i = k_j = 1$ dans (1) pour obtenir, pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}_p)^2$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(a) \qquad \text{et} \qquad \partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a).$$

La généralisation est immédiate. On peut donc énoncer :

THÉORÈME DE SCHWARZ. — **Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans un e.v.n.**

— **Si f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors, pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}_p)^2$:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(a).$$

— **Si f est n fois de différentiable en a, alors, pour tous $j \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:**

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j(1)} \dots \partial x_{j(n)}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{j\sigma(1)} \dots \partial x_{j\sigma(n)}}(a) \, .$$

8.2.5. Puissances symboliques d'une différentielle

1° DÉFINITION. — **Soient E et F des e.v.n., U un ouvert de E, f une application de U dans F n fois différentiable au point $a \in U$. L'application :**

$$E \longrightarrow F \qquad h \longmapsto \mathrm{d}^n f(a) \cdot h \cdot \dots \cdot h \qquad (\textbf{notée } h \longmapsto \mathrm{d}^n f(a) \cdot h^n)$$

est dite puissance symbolique d'ordre n de la différentielle de f au point a.

2° *Cas d'une fonction de p variables réelles.* — Ici $E = \mathbb{R}^p$. On a (formule (8) du 8.2.2, 5°)

$$\mathrm{d}^n f(a) \cdot \boldsymbol{h}^n = \sum_j h_{j(1)} \dots h_{j(n)} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j(1)} \dots \partial x_{j(n)}}(a) \tag{1}$$

où $\boldsymbol{h}$ désigne $(h_1, \dots, h_p)$, et où j décrit $\mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p)$.

Etant donné le p-uple $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$ dont la longueur

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$$

est n, d'après le théorème de Schwarz, si deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p)$ vérifient :

$$\mathrm{Card}\,(j^{-1}(1)) = \alpha_1 \,;\, \dots \,;\, \mathrm{Card}\,(j^{-1}(p)) = \alpha_p \tag{2}$$

alors $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{j(1)} \dots \partial x_{j(n)}}(a)$ leur est commun, et peut s'écrire $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}(a)$.

Désignant par Γ_α le nombre des applications $j \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p)$ qui vérifient (2) pour α donné, on a :

$$\mathrm{d}^n f(a) \cdot \boldsymbol{h}^n = \sum_{|\alpha| = n} \Gamma_\alpha (h_1)^{\alpha_1} \dots (h_p)^{\alpha_p} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}(a)$$

(étant entendu que dans la sommation on envisage tous les $\alpha \in \mathbb{N}^n$ dont la longueur est n).

On remarque que l'expression $(h_1 + \dots + h_p)^n = \sum_j h_{j(1)} \dots h_{j(n)}$ conduit à effectuer le même regroupement que ci-dessus et à écrire :

$$(h_1 + \dots + h_p)^n = \sum_{|\alpha| = n} \Gamma_\alpha (h_1)^{\alpha_1} \dots (h_p)^{\alpha_p}$$

En utilisant I.3.1.2, 3° on en déduit :

$$\Gamma_\alpha = \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_p!}.$$

Règle mnémotechnique. — *On écrit « symboliquement »*

$$\mathrm{d}^n f(a) \cdot \boldsymbol{h}^n = [\mathrm{d}f(a) \cdot \boldsymbol{h}]^{[n]} = \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right]^{[n]}.$$

On développe comme s'il s'agissait d'une puissance n-ième, *et on remplace ensuite chaque produit*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)^{\alpha_p} \quad \textit{par} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}(a).$$

Ce résultat servira à utiliser pratiquement, dans le cas d'une fonction de plusieurs variables, la formule de Taylor (cf. 8.3).

REMARQUES. — *a*) Le lecteur fera la liaison avec la puissance symbolique d'un polynôme (I. 6.8.*2*, 1°).

b) Compte tenu $|h_1| \leqslant \|h\|, \ldots, |h_p| \leqslant \|h\|$ et $\operatorname{Card}(\mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_p)) = p^n$ on déduit de (1), pour tout $h \in \mathbb{R}^p$:

$$\|\mathrm{d}^n f(a)\cdot h^n\| \leqslant p^n \|h\|^n \max_{j} \left(\left\|\frac{\partial^n f}{\partial x_{j(1)} \ldots \partial x_{j(n)}}(a)\right\|\right). \qquad (3)$$

Cette inégalité sera utilisée au 8.3.*1*, 2°.

8.2.*6*. Complément : extension de la notion de polynôme

1° *Polynôme n-homogène.* — THÉORÈME ET DÉFINITION. — **Soient E et F deux e.v.n., et $n \in \mathbb{N}^*$. Une application $\varphi : E \to F$ est dite polynôme n-homogène si et seulement s'il existe une application $g : E^n \to F$, n-linéaire symétrique et continue, telle que :**

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x) = g(x, \ldots, x). \qquad (1)$$

Une telle application φ est de classe C^∞ ; l'application g qui a servi à la définir est unique.

Toute application constante de E dans F est dite polynôme 0-homogène.

Une somme de polynômes homogènes est dite polynôme.

Soient $g \in \mathcal{L}_n(E, F)$, $n \geqslant 1$, et $\varphi : E \to F$, définie à partir de g grâce à (1).

Pour $x \in E$ donné, l'existence et le calcul de $\mathrm{d}\varphi(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ résultent de l'étude de la différentiabilité d'un produit (8.1.*5*, 5°). On a :

$$\mathrm{d}\varphi(x) : \quad h \longmapsto \sum_{i=1}^{n} g(\ldots, x, h, x, \ldots)$$

et, compte tenu de la symétrie de g :

$$\mathrm{d}\varphi(x) : \quad h \longmapsto ng(x, \ldots, x, h).$$

Soit v l'élément de $\mathcal{L}^n(E, F)$ canoniquement associé à g. Nous avons :

$$\varphi : E \to F \quad x \longmapsto v\cdot x^n ; \quad \mathrm{d}\varphi : E \to \mathcal{L}(E, F) \quad x \longmapsto nv\cdot x^{n-1}.$$

Par récurrence, pour tout m tel que $1 \leqslant m \leqslant n$:

$$\mathrm{d}^m\varphi : E \to \mathcal{L}^m(E, F) \quad x \longmapsto n(n-1)\ldots(n-m+1)v\cdot x^{n-m}.$$

En particulier $d^n\varphi : E \to \mathcal{L}^n(E, F)$ est l'application constante $x \longmapsto n!v$, et, pour $m > n$, on a $d^m\varphi = 0$.

Ainsi v, et par suite g, se déduit de φ par $v = \dfrac{1}{n!} d^n\varphi(0)$. □

En particulier on notera que $\varphi = 0$ si et seulement si $g = 0$.

2° ***Application aux puissances symboliques.*** — La puissance symbolique $h \longmapsto d^nf(a) \cdot h^n$ introduite au **8**.2.*5*, 1° est un polynôme n-homogène (ici $v = d^nf(a)$), et donc une application de classe C^∞, dont on sait calculer les différentielles successives.

3° ***Polynômes positifs.*** — Nous nous plaçons ici dans le cas où $F = \mathbb{R}$.

DÉFINITION. — **Le polynôme $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est dit positif (resp. défini-positif) si et seulement si**

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x) \geqslant 0 \qquad [\text{resp. } \forall x \in E \backslash \{0_E\} \ \ \varphi(x) > 0]$$

Notons que **si $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme n-homogène positif, alors n est pair.**

En effet, ici, d'après (1) : $\varphi(-x) = (-1)^n\varphi(x)$.

THÉORÈME. — **Soit φ un polynôme n-homogène défini-positif $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :**

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x) \geqslant \lambda \|x\|^n. \tag{1}$$

En effet la restriction de φ à la sphère unité $S = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| = 1\}$ admet une borne inférieure λ qui *a priori* vérifie $\lambda \geqslant 0$. Comme S est un compact de $\mathbb{R}^p$, cette borne est atteinte : il existe $x_0 \in S$ tel que $\varphi(x_0) = \lambda$; on a $x_0 \neq 0_E$, et donc $\varphi(x_0) > 0$.

D'autre part : $\forall x \in E \backslash \{0_E\} \qquad \varphi(x) = \|x\|^n \varphi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$. □

REMARQUE — Réciproquement, si un polynôme n-homogène vérifie (1), il est manifestement défini-positif (et ceci sans que E soit nécessairement de dimension finie).

8.3. FORMULES DE TAYLOR ET APPLICATIONS

Nous nous proposons d'étendre aux fonctions définies sur des ouverts d'e.v.n. les formules de Taylor établies au **4**.2.*2*, *1° et 2°, dans le cas de fonctions d'une variable réelle, étant entendu qu'il s'agit encore de fonctions à valeurs dans un e.v.n.*

8.3.*1*. L'inégalité de Taylor-Lagrange

1° ***Notation générale.*** — On considère deux e.v.n. E et F, un point $a \in E$, un voisinage ouvert U de a dans E, et une application $f : U \to F$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est n fois différentiable au point a — et donc $n-1$ fois différentiable sur un voisinage ouvert U' de a —, alors, sous réserve que $h \in E$ ait une norme assez petite, on a $a+h \in U$ et on dispose du vecteur

$$r_n(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \mathrm{d}^m f(a) \cdot h^m.$$

Comme au **4**.2.*2*, nous allons traiter deux problèmes fondamentalement différents :

— au **8**.3.*1*, nous exhiberons, *pour h fixé, une majoration de* $\|r_n(h)\|$ et accessoirement nous donnerons certaines expressions de $r_n(h)$;

— au **8**.3.*2*, nous trouverons une *propriété asymptotique de l'application* $h \longmapsto r_n(h)$, qui dira ce qui se passe au voisinage de 0_E.

2° ***L'inégalité de Taylor-Lagrange.*** — THÉORÈME. — **Soient $f : U \to F$ une application de classe C^n sur U, $[a, a+h]$ un segment de E inclus dans U et M un réel positif. Si f admet en tout point de $]a, a+h[$ une différentielle d'ordre $n+1$ majorée en norme par M, alors on a :**

$$\|r_n(h)\| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} M \|h\|^{n+1}. \tag{1}$$

D'après **8**.1.*2*, 2°, l'application composée $g : t \longmapsto f(a+th)$ est de classe C^n sur un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient $[0, 1]$, et $n+1$ fois dérivable sur $]0, 1[$, et on a :

$$g'(t) = \mathrm{d}f(a+th) \cdot h.$$

En utilisant le théorème I du **8**.2.*1*, 3° on en déduit :

$$g''(t) = \mathrm{d}^2 f(a+th) \cdot h^2$$

et, en raisonnant par récurrence :

$$g^m(t) = \mathrm{d}^m f(a+th) \cdot h^m, \quad (1 \leqslant m \leqslant n+1).$$

Pour tout $t \in]0, 1[$, on a donc :

$$\|g^{n+1}(t)\| \leqslant \|\mathrm{d}^{n+1} f(a+th)\| \, \|h\|^{n+1} \leqslant M \|h\|^{n+1}.$$

On peut appliquer à g la formule de Taylor-Lagrange du **4**.2.*2*, 1°, en remplaçant a par 0, b par 1 et M par $M\|h\|^{n+1}$. □

CAS OU $E = \mathbb{R}^p$. — Les hypothèses restant les mêmes, on constate, en utilisant la formule (3) du **8**.2.*5*, 2° que si l'on dispose d'un réel $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ majorant les normes de toutes les dérivées partielles d'ordre $n+1$ de f en tout point de $]a, a+h[$, alors :

$$\|g^{n+1}(t)\| = \|d^{n+1} f(a+th) \cdot h^{n+1}\| \leqslant p^{n+1} \mu \|h\|^{n+1}$$

et on peut remplacer la formule (1) par :

$$\|r_n(h)\| \leqslant p^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \mu \|h\|^{n+1}.$$

COROLLAIRE. — **Soient $f : U \to F$ une application de classe C^n sur U, v un élément de $\mathcal{L}^{n+1}(E, F)$, $[a, a+h]$ un segment inclus dans U et M un réel positif. Si f admet en tout $x \in]a, a+h[$ une différentielle d'ordre $n+1$ telle que $\| \mathrm{d}^{n+1}f(x) - v \| \leqslant M$, alors on a :**

$$\left\|r_n(h) - \frac{1}{(n+1)!}\, v \cdot h^{n+1}\right\| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} M\|h\|^{n+1}.$$

On applique le théorème à la fonction $x \longmapsto f(x) - v.(x-a)^{n+1}$ dont la différentielle d'ordre m, $1 \leqslant m \leqslant n+1$, est $\mathrm{d}^m f(x) - \dfrac{(n+1)!}{(n+1-m)!}\, v \cdot (x-a)^{n+1-m}$ (cf. 8.2.6, 1°).

3° ***Reste de Lagrange dans le cas d'une fonction numérique.*** — THÉORÈME. — **Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^n sur U et $[a, a+h]$ un segment de E inclus dans U. Si f admet une différentielle d'ordre $n+1$ en tout point de $]a, a+h[$, alors il existe au moins un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :**

$$r_n(h) = \frac{1}{(n+1)!} \mathrm{d}^{n+1} f(a+\theta h) \cdot h^{n+1}.$$

On reprend la démonstration du 2°, en appliquant à la fonction g la formule 4.3.4, 3°.

4° ***Reste intégral.*** — Revenons à la notation du 1°.

PROPOSITION. — **Soit $f : U \to F$ une application de classe C^{n+1}, et $[a, a+h]$ un segment de E inclus dans U. Alors on a :**

$$r_n(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{d}^{n+1} f(a+th) \cdot h^{n+1}\, \mathrm{d}t.$$

On applique à la fonction g utilisée au 2° la formule du 6.7.2, 5°.

8.3.2. Théorème de Taylor-Young

On reprend les notations du 8.3.1, 1°.

THÉORÈME. — **Soit $f : U \to F$ une application n fois différentiable au point $a \in U$. Alors l'application**

$$r_n : \quad h \longmapsto f(a+h) - f(a) - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \mathrm{d}^m f(a) \cdot h^m$$

qui est dite reste de rang n de f au point a, vérifie : $r_n(h) = o(\|h\|^n)$.

On peut considérer qu'il s'agit de vérifier qu'une assertion $\mathcal{A}_n$ (que le lecteur est prié de formuler) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— La définition de la différentielle d'une fonction en un point montre que $\mathcal{A}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $n \geqslant 2$. Nous supposons que $\mathcal{A}_{n-1}$ a été vérifiée. Considérons $f : U \to F$, n fois différentiable au point $a \in U$, et associons lui r_n.

Nous avons vu (8.2.6) que l'application $h \longmapsto \mathrm{d}^m f(a) \cdot h^m$ admet pour différentielle sur E l'application

$$h \longmapsto m\,\mathrm{d}^m f(a) \cdot h^{m-1}, \quad (\mathrm{d}^m f(a) \text{ si } m = 1),$$

L'application r_n admet la différentielle

$$\mathrm{d}r_n : h \longmapsto \mathrm{d}f(a+h) - \mathrm{d}f(a) - \frac{1}{1!}\mathrm{d}^2f(a)\cdot h - \ldots - \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{d}^nf(a)\cdot h^{n-1}.$$

On constate que $\mathrm{d}r_n$ est le reste de rang $n-1$ pour l'application $\mathrm{d}f$. D'où d'après $\mathcal{A}_{n-1}$:

$$\mathrm{d}r_n(h) = o(\|h\|^{n-1}).$$

A tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on peut associer $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall k \in E \qquad (\|k\| < \alpha) \Longrightarrow (\|\mathrm{d}r_n(k)\| \leqslant \varepsilon\|k\|^{n-1})$$

Soit $h \in E$, tel que $\|h\| < \alpha$. Tout $k \in [0_E, h]$ vérifie : $\|k\| < \alpha$, et donc : $\|\mathrm{d}r_n(k)\| \leqslant \varepsilon\,\|k\|^{n-1} \leqslant \varepsilon\,\|h\|^{n-1}$. Aussi $\mathrm{d}r_n$ est majorée en norme par

$$\varepsilon\,\|h\|^{n-1} \text{ sur } [0_E, h].$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis (**8.1.*3***), on en déduit, compte tenu de $r_n(0_E) = 0_F$:

$$\forall h \in E \qquad (\|h\| < \alpha) \Longrightarrow (\|r_n(h)\| \leqslant \varepsilon\|h\|^n). \qquad \square$$

8.3.*3*. Application : recherche des extremums relatifs d'une fonction numérique de plusieurs variables

Dans ce paragraphe, nous ne considérons que des fonctions **à valeurs réelles** (fonctions numériques).

La définition des extremums relatifs (ou locaux) a été donnée en **5.3.*1***, 1°.

1° ***Position du problème.*** — Soit f une application d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans $\mathbb{R}$. On se propose de chercher si f admet un extremum relatif au point $a \in U$. Il peut en être ainsi dans le cas où f n'est pas différentiable en a (cf. **5.3.*1***, 2°), mais nous nous limitons ici au cas où il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f soit n fois différentiable au point a et où

$$\mathrm{d}^mf(a) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant m < n\,; \quad \mathrm{d}^nf(a) \neq 0. \tag{1}$$

Le calcul utilisera le polynôme n-homogène

$$\varphi : E \to \mathbb{R} \qquad h \longmapsto \mathrm{d}^nf(a)\cdot h^n$$

et la formule de Taylor-Young à l'ordre n, qui s'écrit ici :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{n!}\,\varphi(h) + \|h\|^n\,\omega(h), \quad \text{avec} \lim_{h\to 0_E}\omega(h) = 0. \tag{2}$$

Nous savons (**8.2.*6***, 1° *in fine*) que la non nullité de $\mathrm{d}^nf(a)$ implique celle de φ.

Nous nous limiterons à l'étude des minimums relatifs. Le cas des maximums s'en déduit en changeant f en $-f$.

2° *Une condition nécessaire.* — THÉORÈME. — **La notation étant celle du 1°, pour que f admette un minimum relatif au point a, il faut que le polynôme φ soit positif (ce qui implique que l'entier n soit pair) (cf. 8.2.6, 3°).**

Puisque $\varphi \neq 0$, il existe des vecteurs $h \in E$ tels que $\varphi(h) \neq 0$; soit k l'un quelconque d'entre eux. Associons à k l'application

$$g : V \to \mathbb{R} \qquad t \longmapsto f(a+tk)$$

où V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$, convenablement choisi.

De (2) nous déduisons, compte tenu de $\varphi(tk) = t^n\varphi(k)$:

$$g(t)-g(0) = t^n\left(\frac{1}{n!}\ \varphi(k)+\varepsilon(t)\right), \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

D'où l'existence d'un ouvert W de $\mathbb{R}$ tel que $\{0\} \subset W \subset V$ et que

$$\forall\, t \in W \qquad \operatorname{sgn}(g(t)-g(0)) = \operatorname{sgn}(t^n\varphi(k)).$$

Il en résulte que :

— Si n est impair l'application g n'admet pas d'extremum relatif au point 0, et *a fortiori* l'application f n'admet pas d'extremum relatif au point a ;

— Si n est pair, on peut écrire :

$$\forall\, t \in W\backslash\{0\} \qquad \operatorname{sgn}(g(t)-g(0)) = \operatorname{sgn}\varphi(k).$$

Pour que f admette un minimum relatif au point a, il est nécessaire que g admette un minimum relatif au point 0, et donc que $\varphi(k) > 0$. □

REMARQUE IMPORTANTE. — Nous poserons (en étendant une définition donnée au 8.1.7, 3° dans le cas où $\dim E < +\infty$) :

DÉFINITION. — **La notation étant celle du 1°, on appelle** *point critique* **de f tout point de U en lequel f admet une différentielle nulle.**

Nous avons ainsi, d'après le théorème précédent :

PROPOSITION. — **Si f est différentiable en a, une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que f admette un extremum relatif en a est que a soit un point critique de f.**

3° *Une condition suffisante.* — THÉORÈME. — **La notation étant celle du 1°, pour que f admette un minimum relatif strict au point a, il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :**

i) **le polynôme φ est positif (ce qui implique que l'entier n est pair).**

ii) **l'application**

$$E\backslash\{0_E\} \to \mathbb{R} \qquad h \longmapsto \frac{1}{\|h\|^n}\,\varphi(h)$$

admet une borne inférieure λ strictement positive.

— Avant de faire la démonstration, notons que, dans le cas usuel où E est de dimension finie, la condition s'écrit (8.2.6, 3°) :

iii) **le polynôme φ est défini-positif.**

— Les conditions *i*) et *ii*) étant supposées remplies, (2) montre qu'il existe $W \in \mathcal{V}(0_E)$ tel que :

$$\forall\, h \in W \setminus \{0_E\} \qquad f(a+h) - f(a) \geqslant \|h\|^n \left(\frac{\lambda}{n!} + \omega(h)\right).$$

Compte tenu de $\lim \omega(h) = 0$, on en déduit qu'il existe $W' \in \mathcal{V}(0_E)$ tel que $\forall\, h \in W' \setminus \{0_E\} \quad f(a+h) - f(a) > 0$. □

4° ***Cas d'une fonction réelle de m variables réelles.*** — Soient $(x_1, \ldots, x_m) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_m)$ une application deux fois différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, et $a = (a_1, \ldots, a_m)$ un point de U.

Nous avons calculé au 8.2.5 :

$$\mathrm{d}f(a)\cdot(h_1, \ldots, h_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

$$\mathrm{d}^2 f(a)\cdot(h_1, \ldots, h_m)^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) h_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

La condition nécessaire d'extremum du 2° s'écrit :

$$\forall i \in \mathbb{N}_m \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Nous la supposons remplie, et nous considérons le polynôme 2-homogène (ou forme quadratique) :

$$\varphi : (h_1, \ldots, h_m) \longmapsto \mathrm{d}^2 f(a)\cdot(h_1, \ldots, h_m)^2$$

que nous supposons non nul (de façon à utiliser 2° et 3° avec $n = 2$).

Soient (p, q) la signature de φ et $p + q$ son rang (cf. II.1.2.3); p (resp. q) est le nombre des racines (distinctes ou confondues) strictement positives (resp. strictement négatives) de l'équation caractéristique de la matrice :

$$\Omega = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{(i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m}.$$

Rappelons que φ est non dégénérée si, et seulement si $\det \Omega \neq 0$, et que, si φ est positive, alors elle est définie si et seulement si elle est non dégénérée.

Trois cas, et trois seulement sont possibles :

1[er] CAS : *φ est définie positive* [resp. *définie négative*] i.e. $(p, q) = (m, 0)$ [resp. $(p, q) = (0, m)$]. D'après 3°, *f admet en a un minimum* (resp. *maximum*) *relatif strict*.

2[e] CAS : *φ est non dégénérée et non définie* i.e. $p + q = m$ et $pq \neq 0$. Ici φ prend à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. La condition nécessaire du 2° n'est pas remplie : *f n'admet pas d'extremum relatif au point a.*

3ᵉ CAS : *φ est dégénérée* i.e. $\det \Omega = 0$ i.e. $p + q < m$. Si φ n'est ni positive, ni négative (i.e. $pq \neq 0$), alors comme dans le 2ᵉ cas, φ n'admet pas d'extremum relatif au point a. Si φ est positive (resp. négative), la condition nécessaire du 2° est remplie, la condition suffisante du 3° ne l'est pas : *a priori* on ne peut rien dire et il faut recourir aux différentielles d'ordre supérieur à 2, si elles existent.

Dans certains cas, une étude élémentaire fournit cependant le résultat, c'est ainsi que $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^6$ admet un minimum relatif strict au point (0, 0), mais que $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^6$ n'admet pas d'extremum relatif au point (0, 0); or dans les deux cas φ est dégénérée positive.

REMARQUE. — Pour $m = 2$, on adopte la notation classique :

$$f : (x, y) \longmapsto f(x, y); \qquad \varphi : (h, k) \longmapsto r^2h^2 + 2shk + tk^2$$

où :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

et les trois cas de la discussion correspondent :

1ᵉʳ CAS : $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ [resp. $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$].

2ᵉ CAS : $rt - s^2 < 0$.

3ᵉ CAS : $rt - s^2 = 0$. Ici la forme non nulle φ, de rang 1, est soit positive ($r > 0$ *ou* $t > 0$), soit négative ($r < 0$ *ou* $t < 0$).

5° *Compléments.* — *a*) Revenons à l'application f introduite au 1°.

Si la condition nécessaire d'extremum $df(a) = 0$ est remplie, on a déjà dit que a est un *point critique* de f.

Si la condition nécessaire du 2° est remplie, sans que f admette un extremum relatif en a, on dit que a constitue un *col* pour f.

b) Si, sans être une application nulle, f admet des différentielles de tous ordres nulles au point a, l'étude qui précède ne s'applique pas.

c) Echappe également à cette étude tout extremum relatif atteint en un point où f n'est pas différentiable.

d) Dans la pratique, f est souvent définie, non sur un ouvert, mais sur une partie quelconque A d'un e.v.n. L'étude qui précède ne nous apprend rien sur ce qui peut se passer en un point de $A \setminus \mathring{A}$. En particulier, lorsque A est un compact de E, on sait que f admet un maximum absolu et un minimum absolu; il peut se faire que ces valeurs soient atteintes en des points de $A \setminus \mathring{A}$.

EXEMPLE. — *Extremums de la fonction* :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto 2(x-y)^2 - x^4 - y^4.$$

Il s'agit d'une fonction polynôme, de classe C^∞. Elle ne peut admettre d'extremum relatif qu'en un point où les deux dérivées partielles du premier ordre prennent la valeur 0. Calculons :

$$f'_x(x, y) = 4(x-y) - 4x^3; \qquad f'_y(x, y) = -4(x-y) - 4y^3.$$

Une condition nécessaire d'extremum est donc :

$$(x^3 + y^3 = 0) \wedge (x^3 - y^3 - 2(x-y) = 0).$$

Elle s'écrit :

$$(x+y = 0) \wedge ((x-y)(x^2+xy+y^2-2) = 0).$$

Elle est vérifiée par les points (0, 0), ($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), ($-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$) et par ces points seulement.

Etude de f au voisinage du point ($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$). On calcule :

$$f''_{x^2}(x, y) = 4-12x^2 ; \quad f''_{xy}(x, y) = -4 ; \quad f''_{y^2}(x, y) = 4-12y^2.$$

Au point ($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), on a : $r = -20$, $s = -4$, $t = -20$, et donc

$$rt-s^2 > 0 \text{ et } r < 0.$$

La fonction admet au point ($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$) un maximum relatif strict, égal à 8. Même résultat au point ($-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), d'après $f(-x, -y) = f(x, y)$.

Etude de f au voisinage du point (0, 0). — Ici $rt-s^2 = 0$. On a :

$$f(x, 0) = x^2(2-x^2) ; \quad f(x, x) = -2x^4 ; \quad f(0, 0) = 0$$

Sur tout disque ouvert de centre (0, 0), il y a donc des points (x, y) tels que $f(x, y) > f(0, 0)$ et des points (x, y) tels que $f(x, y) < f(0, 0)$. Pas d'extremum au point (0, 0).

8.4. FONCTIONS HOMOGÈNES. FONCTIONS CONVEXES

8.4.*1*. Fonctions positivement homogènes

1° *Cônes positifs.* — Définition. — **Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle cône positif toute partie $C \subset E$ qui vérifie la condition**

$$\forall x \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad tx \in C.$$

Il s'agit donc d'une partie de E invariante dans toute homothétie de rapport strictement positif. E et $E\setminus\{0\}$ sont des cônes positifs de E.

2° *Applications positivement homogènes.*— Définition. — **Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, C un cône positif de $E, f : C \to F$ une application, et k un réel (pas forcément entier). On dit que f est k-positivement homogène si, et seulement si la condition suivante est vérifiée :**

$$\forall x \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(tx) = t^k f(x). \tag{1}$$

La fonction nulle est k-positivement homogène pour tout $k \in \mathbb{R}$. En revanche si f, non nulle, est k-positivement homogène et k'-positivement homogène, alors $k = k'$; il suffit d'écrire (1) pour $x_0 \in C$ tel que $f(x_0) \neq 0$, ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad t^k = t^{k'}.$$

Exemples. — *a*) Une norme sur E est une application 1-positivement homogène du cône positif E dans $\mathbb{R}$.

b) Un polynôme n homogène $\varphi : E \to F$ (8.2.*6*, 1°) est une application n-positivement homogène.

c) $(x, y) \longmapsto \sqrt{x + y}$ est une application 1/2-positivement homogène du cône positif

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x+y \geqslant 0\} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

3° Proposition I. — **Soient E et F deux e.v.n., C un cône positif ouvert** [1] **de $E, f : C \to F$ une application différentiable sur C, et k-positivement homogène. Alors $\mathrm{d}f : C \to \mathscr{L}(E, F)$ est $(k-1)$-positivement homogène.**

On écrit que, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, les applications

$$x \longmapsto f(tx) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto t^k f(x)$$

ont la même différentielle au point $x \in C$. On obtient $t\,\mathrm{d}f(tx) = t^k \mathrm{d}f(x)$, et, comme $t \neq 0$: $\mathrm{d}f(tx) = t^{k-1}\mathrm{d}f(x)$. □

Cas de $E = \mathbb{R}^p$. — Proposition II. — **Soient F un e.v.n., C un cône positif ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : C \to F$ une application k-positivement homogène. On suppose que f admet, sur C, une dérivée partielle par rapport à l'une des variables ; alors cette dérivée partielle est $(k-1)$-positivement homogène.**

Nous notons $f : (x_1, \dots, x_p) \longmapsto f(x_1, \dots, x_p)$ et nous supposons que f'_{x_1} est définie sur C.

Etant donnés $(x_1, \dots, x_p) \in C$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons, pour $h \in \mathbb{R}$ non nul et $|h|$ assez petit :

$$\frac{f(tx_1 + th, tx_2, \dots, tx_p) - f(tx_1, tx_2, \dots, tx_p)}{th} = t^{k-1}\,\frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_p) - f(x_1, x_2, \dots, x_p)}{h}.$$

En utilisant l'existence de f'_{x_1} aux points $(x_1, \dots, x_p)$ et $(tx_1, \dots, tx_p)$, on en déduit :

$$f'_{x_1}(tx_1, \dots, tx_p) = t^{k-1} f'_{x_1}(x_1, \dots, x_p).$$ □

Notons que, sous une hypothèse plus large (f différentiable sur C) la proposition II est un corollaire de la proposition I.

Exemple. — $f(x, y) = \operatorname{Arc\,tg} y/x$; $f'_x(x, y) = -y/(x^2+y^2)$; $f'_y(x, y) = x/(x^2+y^2)$.

Ici f est 0-positivement homogène ; f'_x et f'_y sont (-1)-positivement homogènes sur le cône ouvert $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$.

4° *Identité d'Euler.* — Théorème. — **Soient E et F deux e.v.n., C un cône positif ouvert de $E, f : C \to F$ une application différentiable sur C, et k un réel. Alors f est k-positivement homogène si, et seulement si la condition suivante (dite identité d'Euler) est vérifiée :**

$$\forall\, x \in C \qquad \mathrm{d}f(x)\cdot x = kf(x). \tag{2}$$

La condition est nécessaire. — Par hypothèse f est k-positivement homogène. Ecrivons que, pour $x \in C$ fixé, les applications $t \longmapsto f(tx)$ et $t \longmapsto t^k f(x)$ ont la même dérivée au point t :

$$\mathrm{d}f(tx)\cdot x = kt^{k-1}f(x).$$

---

[1] Cela implique $(C = E) \vee (O \notin C)$.

En particulier, pour $t = 1$, on obtient (2).

La condition est suffisante. — Par hypothèse la condition (2) est vérifiée. Puisque f est définie sur un cône, on en déduit

$$\forall x \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad t\, \mathrm{d}f(tx)\cdot x = k\, f(tx). \tag{3}$$

Remarquons que, pour $x \in C$ fixé, l'application $\varphi : t \longmapsto f(tx)$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans F admet pour $\mathrm{d}f(tx)\cdot x$ pour dérivée au point t. Dans ces conditions (3) s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad t\,\varphi'(t) = k\,\varphi(t)$$

ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^{-k}\varphi(t)\right) = 0.$$

On en déduit que $t \longmapsto t^{-k}\varphi(t)$ est une application constante sur $\mathbb{R}_+^*$; la valeur de cette fonction au point $t = 1$ étant $\varphi(1) = f(x)$, on en déduit (1). □

Cas particulier. — **Si $E = \mathbb{R}^p$, (2) s'écrit :**

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in C \qquad \sum_{j=1}^{p} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = k\, f(x).$$

8.4.2. Fonctions convexes

Nous allons généraliser une étude faite au 4.5.1.

1° Définition. — **Soit f une fonction numérique définie sur une partie convexe D d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On dit que f est convexe si, et seulement si l'assertion suivante est vérifiée :**

$$\forall (x, y) \in D^2 \qquad \forall t \in [0, 1] \qquad f(tx + (1-t)y) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y) \tag{1}$$

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on retrouve la définition du 4.5.1. Ici encore, on montre que f est *convexe si*, et *seulement si l'épigraphe de f*

$$\{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \mid (x \in D) \wedge (f(x) \leqslant y)\}$$

est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.

Proposition. — **f est convexe si et seulement si, pour tout $(x, y) \in D^2$, l'application**

$$\varphi_{(x,y)} : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad t \longmapsto f(tx + (1-t)y)$$

est convexe.

Pour tous $(x, y) \in D^2$ et $t \in [0, 1]$ on a :

$$t f(x) + (1-t) f(y) = t\varphi_{(x,y)}(1) + (1-t)\varphi_{(x,y)}(0) \tag{2}$$

— Si $\varphi_{(x,y)}$ est convexe pour tout $(x, y) \in D^2$ on constate, en utilisant (2), que (1) est vérifiée

— Supposons maintenant que f est convexe, et considérons $(x, y) \in D^2$.

Pour tous t', t'' et λ dans $[0, 1]$, on a, en posant $z' = t'x + (1-t')y$ et $z'' = t''x + (1-t'')y$:

$$\varphi_{(x,y)}(\lambda t' + (1-\lambda)t'') = f(\lambda z' + (1-\lambda) z'')$$

et donc : $\varphi_{(x,y)}(\lambda t'+(1-\lambda)t'') \leqslant \lambda f(z')+(1-\lambda)f(z'')$

Comme : $f(z') = \varphi_{(x,y)}(t')$ et $f(z'') = \varphi_{(x,y)}(t'')$ la convexité de $\varphi_{(x,y)}$ en résulte. □

2° ***Différentiabilité et convexité.*** — THÉORÈME I. — **Soit f une fonction numérique différentiable sur un ouvert convexe U d'un e.v.n. E. Alors f est convexe si, et seulement si :**

$$\forall (a, x) \in U^2 \qquad f(x) \geqslant f(a)+\mathrm{d}f(a).(x-a) \tag{3}$$

Avec les notations de la proposition du 1°, l'application $\varphi_{(x,y)}$ (prolongée à un ouvert contenant [0, 1]) a pour dérivée au point t :

$$\mathrm{d}f(tx+(1-t)y).(x-y).$$

— Supposons que f est convexe ; $\varphi_{(x,y)}$ est donc convexe pour tout $(x, y) \in U^2$ et on a (**4**.5.*1*, 2°) : $\varphi'_{(x,y)}(0) \leqslant \varphi_{(x,y)}(1)-\varphi_{(x,y)}(0)$, ce qui s'écrit $\mathrm{d}f(y)\cdot(x-y) \leqslant f(x)-f(y)$. □

— Supposons que la condition (3) est remplie. Pour tous (t, u) dans $[0, 1]^2$, et (x, y) dans U^2, on a :

$$f(ux+(1-u)y) \geqslant f(tx+(1-t)y)+\mathrm{d}f(tx+(1-t)y).((u-t)(x-y))$$

Ce qui s'écrit :

$$\varphi_{(x,y)}(u) \geqslant \varphi_{(x,y)}(t) + (u-t)\,\varphi'_{(x,y)}(t).$$

Il en résulte (**4**.5.*1*, 4°) que $\varphi_{(x,y)}$ est convexe. □

REMARQUE. — La condition (3) signifie que, pour tout $a \in U$, le graphe de f est « au-dessus » du graphe de l'application affine tangente à f au point a.

THÉORÈME II. — **Soit f une fonction numérique deux fois différentiable sur un ouvert convexe U d'un e.v.n. E. Alors f est convexe si et seulement si le polynôme $h \longmapsto \mathrm{d}^2f(a)\cdot h^2$ est positif pour tout $a \in U$.**

L'application $\varphi_{(x,y)}$ introduite dans la proposition du 1° a pour dérivée seconde au point t : $\mathrm{d}^2f(tx+(1-t)y).(x-y)^2$

f est convexe si, et seulement si $\varphi_{(x,y)}$ est convexe pour tout $(x, y) \in U^2$, c'est-à-dire (**4**.5.*1*, 3°) si et seulement si :

$$\forall\,(x, y) \in u^2 \quad \forall\, t \in [0, 1] \qquad \varphi''_{(x,y)}(t) \geqslant 0.$$

On vérifie que cette condition équivaut à : $\forall\, a \in U\ \forall\, h \in E\ \mathrm{d}^2f(a).h^2 \geqslant 0$. □

8.5. FONCTIONS IMPLICITES. FONCTIONS RÉCIPROQUES

8.5.*1*. Le problème des fonctions implicites

Soient E, F, G des e.v.n. et f une application d'un ouvert W de $E \times F$ dans G. On associe à f le *graphe* $\Gamma = \{(x, y) \in W | f(x, y) = 0\}$ et la *correspondance* $g = (\Gamma, E, F)$, les notations étant celles du I.**1**.2.*3*.

a) Un cas favorable est celui où Γ est un *graphe fonctionnel* ; g est alors une *fonction* de E vers F, à laquelle est canoniquement associée une *application* $\psi : pr_1\Gamma \longrightarrow F$ dont le graphe est Γ : pour tout $x \in pr_1\Gamma$, $\psi(x)$ est l'unique solution de *l'équation* $f(x, y) = 0$, *à l'inconnue* $y \in F$. On dit que g est une *fonction implicite*.

REMARQUE. — Il peut même se faire que l'on soit en mesure d'*expliciter* g (c'est-à-dire ψ). C'est ainsi que si f est l'application

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto e^y \cos x + 3e^y - 4$$

la condition $f(x, y) = 0$ définit explicitement l'application

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \ln 4 - \ln(\cos x + 3).$$

Nous nous proposons de rechercher des *conditions suffisantes d'existence* d'une fonction implicite, sans qu'il soit question d'aborder dans le cas général le problème d'une éventuelle détermination explicite.

b) Plus précisément, nous allons démontrer :

PROPOSITION. — **Sous certaines conditions de régularité de l'application f, il existe un recouvrement de Γ de la forme $(U_i \times V_i)_{i\in I}$ où U_i et V_i sont respectivement des ouverts de E et F, tel que, pour tout $i \in I$, soit vraie l'une des assertions :**

i) $\Gamma_i = \{(x, y) \in U_i \times V_i | f(x, y) = 0\}$ **est le graphe d'une application** $U_i \to V_i$;

ii) $\Gamma'_i = \{(y, x) \in V_i \times U_i | f(x, y) = 0\}$ **est le graphe d'une application** $V_i \to U_i$.

*Après avoir étudié le théorème qui suit (**8.5.2**, 1°), le lecteur vérifiera aisément que cette proposition en est un corollaire immédiat (i étant le point (a, b) de $I = \Gamma$).*

Dans la pratique, on recherchera, si possible, un recouvrement fini de Γ.

C'est ainsi que dans le cas où f est l'application

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1$$

on peut adopter $I = \mathbb{N}_4$ et :

$U_1 \times V_1 =]-1, 1[\times \mathbb{R}^*_+$; $U_2 \times V_2 =]-1, 1[\times \mathbb{R}^*_-$;

$U_3 \times V_3 = \mathbb{R}^*_+ \times]-1, 1[$; $U_4 \times V_4 = \mathbb{R}^*_- \times]-1, 1[$.

Γ_1 est le graphe de l'application $x \longmapsto \sqrt{-x^2+1}$ de U_1 dans V_1 ;

Γ_2 est le graphe de l'application $x \longmapsto -\sqrt{-x^2+1}$ de U_2 dans V_2 ;

Γ'_3 est le graphe de l'application $y \longmapsto \sqrt{-y^2+1}$ de V_3 dans U_3 ;

Γ'_4 est le graphe de l'application $y \longmapsto -\sqrt{-y^2+1}$ de V_4 dans U_4.

8.5.2. Théorème des fonctions implicites

1° *Existence et continuité.* — Soient E un e.v.n., F et G deux espaces de Banach, $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ une application **continue** d'un ouvert W de $E \times F$ dans G, enfin (a, b) un point de W tel que $f(a, b) = 0$.

($E \times F$ est muni de la norme $\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ ou de la norme équivalente $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$).

THÉORÈME. — **On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :**

i) f **admet une différentielle partielle en** y, $\partial_2 f$, **définie sur** W, **et continue au point** (a, b) ;

ii) $\partial_2 f(a, b)$ **est un homéomorphisme de** F **sur** G **qui sera noté** Q.

Alors il existe un voisinage ouvert U **de** a **dans** E, **et un voisinage ouvert** V **de** b **dans** F **tels que, pour tout** $x \in U$, **l'équation** $f(x, y) = 0$, **à l'inconnue** y **admette une, et une seule solution dans** V.

En désignant cette solution par $\psi(x)$, **on détermine l'unique application de** U **dans** F **qui vérifie la condition :**

$$\forall\, x \in U \qquad (\psi(x) \in V) \wedge (f(x, \psi(x)) = 0).$$

Cette application est continue ; elle vérifie évidemment $\psi(a) = b$.

La figure, qui correspond au cas le plus simple $E = F = G = \mathbb{R}$, est destinée à aider le lecteur à bien comprendre la situation. Elle fait intervenir le graphe Γ et le graphe de l'application ψ, qui est la partie de Γ incluse dans $U \times V$ (elle est représentée par un trait renforcé).

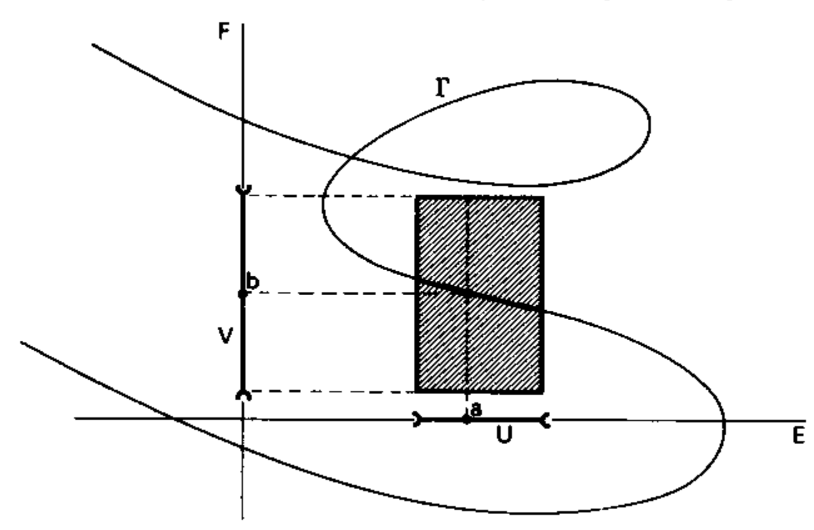


FIG. 12

— Considérons l'application $g : W \to F \quad (x, y) \longmapsto y - (Q^{-1} \circ f)(x, y)$.

Nous avons : $\forall\, (x, y) \in W \quad (f(x, y) = 0 \iff g(x, y) = y)$.

Ceci nous conduit à essayer d'appliquer le théorème du point fixe à l'équation $g(x, y) = y$, à l'inconnue y, dans laquelle x est un paramètre (ce qui explique que nous ayons imposé à F d'être complet).

En utilisant les propriétés de la composition des fonctions, nous déduisons des hypothèses que g est continue sur W, et admet la différentielle partielle définie sur W et continue au point (a, b)

$$(x, y) \longmapsto \partial_2 g(x, y) = Id_F - Q^{-1} \circ \partial_2 f(x, y).$$

En particulier $\partial_2 g(a, b)$ est l'élément nul de $\mathcal{L}(F, F)$.

Nous allons montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, l'application $y \longmapsto g(x, y)$ soit k-contractante, avec, pour fixer les

idées $k = 1/2$. La continuité de $\partial_2 g$ au point (a, b) implique qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule fermée $\mathcal{B} = \{(x, y) \in E \times F \mid \|x-a\| \leqslant r \text{ et } \|y-b\| \leqslant r\}$ soit incluse dans W et vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathcal{B} \qquad \|\partial_2 g(x, y)\| \leqslant 1/2.$$

La boule $\mathcal{B}$ étant convexe, on constate, par la formule des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{B} \quad \forall (x, y') \in \mathcal{B} \quad \|g(x, y') - g(x, y)\| \leqslant 1/2 \cdot \|y - y'\| \qquad (1)$$

Soit $\mathcal{V}$ la boule fermée de F de centre b et de rayon r ; partie fermée d'un espace métrique complet, $\mathcal{V}$ est un espace métrique complet.

La continuité de $x \longmapsto g(x, b)$ au point a fait qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a, tel que $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \subset \mathcal{B}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{U} \qquad \|g(x, b) - g(a, b)\| \leqslant r/2 \qquad (2)$$

En écrivant, pour $(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$:

$$\|g(x, y) - b\| \leqslant \|g(x, y) - g(x, b)\| + \|g(x, b) - g(a, b)\|$$

et en utilisant (1) et (2) on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \qquad g(x, y) \in \mathcal{V}.$$

En reprenant (1), on en déduit que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $y \longmapsto g(x, y)$ détermine une application 1/2-contractante de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$.

— Comme, par ailleurs, pour tout $y \in \mathcal{V}$, l'application $x \longmapsto g(x, y)$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ est continue, le théorème du **2.4.**3, 3° s'applique : pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe un, et un seul $y \in \mathcal{V}$ tel que $g(x, y) = y$, ce qui s'écrit $f(x, y) = 0$; en désignant cet élément de $\mathcal{V}$ par $\varphi(x)$, on détermine une application *continue* $\varphi : \mathcal{U} \to F$, à image dans $\mathcal{V}$.

— Soit V l'intérieur de $\mathcal{V}$; posons $U = \varphi^{-1}(V)$; image réciproque d'un ouvert par une application continue, U est un ouvert de $\mathcal{U}$, et donc un ouvert de E, puisque $\mathcal{U}$ est lui-même un ouvert de E. Il suffit de désigner par ψ la restriction de φ à U pour obtenir le théorème. □

REMARQUE. — L'homéomorphisme $Q : F \to G$ conservant les suites de Cauchy et les suites convergentes, G, comme F, doit être supposé complet.

2° ***Différentiabilité.*** — THÉORÈME. — **Si f vérifie les hypothèses du 1° et, en outre, est différentiable au point (a, b), alors l'application implicite ψ est différentiable au point a et l'on a :**

$$d\psi(a) = -(\partial_2 f(a, b))^{-1} \circ \partial_1 f(a, b).$$

Ici on dispose non seulement de $Q = \partial_2 f(a, b)$, mais de $P = \partial_1 f(a, b)$; on a :

$$df(a) : E \times F \to G \qquad (h, k) \longmapsto P \cdot h + Q \cdot k.$$

Posons $k(h) = \psi(a+h)-\psi(a) = \psi(a+h)-b$ (pour $\|h\|$ suffisamment petit).

En utilisant la définition d'une application différentiable et la continuité de ψ au point a, on constate que $(-P\cdot h - Q\cdot k(h))$, qui est aussi :

$$f(a+h,\, b+k(h)) - f(a,\, b) - P\cdot h - Q\cdot k(h)$$

s'écrit : $(\|h\| + \|k(h)\|)\, \varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0,\, h\neq 0} \varepsilon(h) = 0.$ (3)

Des vecteurs égaux de G ayant la même image par Q^{-1}, on a :

$$k(h) = -(Q^{-1}\circ P)\cdot h - (\|h\| + \|k(h)\|)\, Q^{-1}\cdot\varepsilon(h) \tag{4}$$

et : $\|k(h)\| \leqslant \|Q^{-1}\circ P\|\ \|h\| + (\|h\| + \|k(h)\|)\, \|Q^{-1}\|\ \|\varepsilon(h)\|.$

D'après (3), il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $h \in E\backslash\{0\}$ vérifiant $\|h\| \leqslant \rho$ on ait :

$$\|Q^{-1}\|\ \|\varepsilon(h)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

et donc : $\|k(h)\| \leqslant \alpha\|h\|$, avec $\alpha = 2\|Q^{-1}\circ P\| + 1$

et encore, en revenant à (4) :

$$\|\psi(a+h) - \psi(a) + (Q^{-1}\circ P)\cdot h\| \leqslant \beta\|h\|\ \|\varepsilon(h)\|$$

avec $\beta = (\alpha+1)\ \|Q^{-1}\|$. □

REMARQUES. — *a*) Nous montrerons au paragraphe suivant que *si, en outre, f est de classe* C^1 (resp. C^n) *alors l'application implicite* ψ *admet une restriction de classe* C^1 (resp. C^n). Ce résultat pourra être admis en première lecture.

b) L'expression de $d\psi(a)$ est facile à retenir *à partir de* ;

$$\forall x \in U \qquad f(x,\, \psi(x)) = 0,$$

si on admet que ψ *est différentiable on a* :

$$\partial_1 f(a,\, b) + \partial_2 f(a,\, b)\circ d\psi(a) = 0, \text{ d'où } d\psi(a) = -(\partial_2 f(a,\, b))^{-1}\circ\partial_1 f(a,\, b)$$

8.5.3. Compléments

1° ***Etude des homéomorphismes linéaires.*** — PROPOSITION. — **Soient F et G deux espaces de Banach. L'ensemble $\mathcal{H}$ des homéomorphismes linéaires**[1] **de F sur G est un ouvert de $\mathcal{L}(F,\, G)$. L'application $\theta : u \longmapsto u^{-1}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}(G,\, F)$ admet en tout $u \in \mathcal{H}$ la différentielle $d\theta(u) : h \longmapsto -u^{-1}\circ h\circ u^{-1}$ (et donc est continue).**

[1] On démontre (théorème de Banach) que, si F et G sont complets, un élément $u \in \mathcal{L}(F,\, G)$ est un homéomorphisme si, et seulement si u est *bijective* (cf. exercice 3.10).

• Il s'agit d'abord de prouver que, pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$, il existe un ouvert de $\mathcal{L}(F, G)$, contenant u_0 et inclus dans $\mathcal{H}$. Considérons l'application

$$f : \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(G, F) \to \mathcal{L}(G, G) \qquad (u, v) \longmapsto u \circ v - Id_G.$$

En utilisant la différentiabilité d'une application bilinéaire continue et celle d'une application linéaire continue, on constate que, en tout (u, v), f est différentiable et admet la différentielle partielle :

$$\partial_2 f(u, v) : \mathcal{L}(G, F) \to \mathcal{L}(G, G) \qquad l \longmapsto u \circ l$$

— Considérons maintenant un point quelconque u_0 de $\mathcal{H}$, et soit u_0^{-1} l'homéomorphisme réciproque de u_0 ; $\partial_2 f(u_0, u_0^{-1})$, qui s'écrit $l \longmapsto u_0 \circ l$, est un homéomorphisme (l'application réciproque s'écrivant $k \longmapsto u_0^{-1} \circ k$).

Les conditions d'application du théorème du 8.5.2, 1° sont remplies : il existe un ouvert $U_d \ni u_0$ de $\mathcal{L}(F, G)$ tel que, pour tout $u \in U_d$, l'équation $u \circ v = Id_G$, à l'inconnue $v \in \mathcal{L}(G, F)$, admette une solution u_d.

On montre de même qu'il existe un ouvert $U_g \ni u_0$ de $\mathcal{L}(F, G)$ tel que, pour tout $u \in U_g$, l'équation $v \circ u = Id_F$, à l'inconnue $v \in \mathcal{L}(G, F)$, admette une solution u_g.

— Considérons l'ouvert $U = U_d \cap U_g$ de $\mathcal{L}(F, G)$, qui contient u_0. Pour tout $u \in U$, on dispose à la fois de u_d et de u_g. On a : $u_d = u_g$,[en effet de $u \circ u_d = Id_G$ on déduit $u_g \circ u \circ u_d = u_g$; compte tenu de $u_g \circ u = Id_F$, il en résulte $u_d = u_g$]. Ainsi tout $u \in U$ est un élément de $\mathcal{H}$ (dont l'homéomorphisme réciproque est u_d). □

• D'après 8.5.2, 2°, l'application $\psi_d : u \longmapsto u_d$ de U dans $\mathcal{L}(G, F)$ est différentiable au point u_0. Il en est de même pour l'application $\theta : u \to u^{-1}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}(G, F)$, qui coïncide avec ψ_d sur U, et on a :

$$d\theta(u_0) = d\psi_d(u_0) = -(\partial_2 f(u_0, u_0^{-1}))^{-1} \circ (\partial_1 f(u_0, u_0^{-1})).$$

On a vu que $(\partial_2 f(u_0, u_0^{-1}))^{-1}$ s'écrit : $k \longmapsto u_0^{-1} \circ k$.

On constate que $\partial_1 f(u_0, u_0^{-1})$ s'écrit : $h \longmapsto h \circ u_0^{-1}$. D'où : $d\theta(u_0)$. □

REMARQUE. — Si F et G ont des dimensions finies q et m on a $\mathcal{H} = \varnothing$ si $q \neq m$ et $\mathcal{H} = \text{Isom}(F, G)$ si $q = m$ (vérification laissée au lecteur).

APPLICATION. — **Aux données du 1° nous adjoignons une application différentiable $t \longmapsto u(t)$ d'un ouvert I de E dans $\mathcal{L}(F, G)$, à valeurs dans $\mathcal{H}$. Nous disposons ainsi de :**

$$\varphi : I \to \mathcal{L}(G, F) \qquad t \longmapsto (u(t))^{-1}$$

Alors φ est différentiable en tout point $t \in I$ et on a :

$$d\varphi(t) : E \to \mathcal{L}(G, F) \qquad h \longmapsto -(u(t))^{-1} \circ (du(t).h) \circ (u(t))^{-1}.$$

EXEMPLE. — Soit $t \longmapsto M(t)$ une application dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'e.v.n. $\mathcal{M}_R(n)$, à valeurs dans le groupe linéaire $GL_R(n)$. Pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{dM^{-1}}{dt} = -M^{-1}\frac{dM}{dt}M^{-1}.$$

2° ***Retour sur le théorème des fonctions implicites.*** — Reprenons l'application f de l'ouvert W de $E \times F$ dans G et le point $(a, b) \in W$ tel que $f(a, b) = 0$ (notations du 8.5.2, 1°).

THÉORÈME. — **On suppose que f est de classe C^1 et que $\partial_2 f(a, b)$ est un homéomorphisme. Alors il existe un voisinage ouvert U_0 de a dans E, un voisinage ouvert V_0 de b dans F tel que l'ensemble $\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \mid f(x, y) = 0\}$ soit le graphe d'une application $\psi_0 : U_0 \to F$, de classe C^1 sur U_0.**

Ici $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continus sur W. L'image réciproque W' de $\mathcal{H}$ (notation du 1°) par l'application continue $\partial_2 f$ de W dans $\mathcal{L}(F, G)$ est un voisinage ouvert de (a, b) dans W et aussi dans $E \times F$ (car W est un ouvert de $E \times F$).

Appliquons les résultats du **8.5.2**, non plus à f, mais à la restriction f_0 de f à W'. D'où l'existence de U_0, V_0 et ψ_0. Pour tout $x \in U_0$, on peut même appliquer **8.5.2**, à f_0 en faisant jouer à $(x, \psi_0(x))$ le rôle de (a, b). On dispose d'une application implicite associée à x, qui, du fait de la propriété d'unicité, coïncide avec ψ_0 sur un voisinage convenablement choisi de x ; elle est différentiable en x — et il en est de même pour ψ_0 — car en un tel point x on a :

$$\partial_2 f(x, \psi_0(x)) \in \mathcal{H}.$$

On a :

$$\mathrm{d}\psi_0(x) = -(\partial_2 f(x, \psi_0(x))^{-1} \circ \partial_1 f(x, \psi_0(x)). \tag{1}$$

La continuité de $\mathrm{d}\psi_0$ se prouve aisément. □

PROPOSITION. — **Les notations étant celles du théorème précédent, soit** U' **un voisinage connexe de** a **dans** E, **inclus dans** U_0 **et soit** $g : U' \to F$ **une application continue telle que :**

$$g(a) = b\,; \quad (x, g(x)) \in W \quad \text{et} \quad f(x, g(x)) = 0 \quad \textbf{pour tout} \quad x \in U'.$$

Alors g **est la restriction de** ψ_0 **à** U'.

Soit $A = \{x \in U' \,|\, g(x) = \psi_0(x)\}$. Cet ensemble contient a et est fermé (**2.2.4**, 1°). Il suffit de montrer qu'il est ouvert pour pouvoir affirmer qu'il coïncide avec U', ce qui démontre la proposition. La vérification est laissée au lecteur.

GÉNÉRALISATION. — **Les hypothèses étant celles du précédent théorème, si** f **est de classe** $C^n, n \geqslant 1$, **sur** W, **alors** ψ_0 **est de classe** C^n **sur** U_0 **(proposition** $\mathcal{A}_n$**).**

— $\mathcal{A}_1$ est vraie.

— Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{A}_{n-1}$ a été vérifiée. Considérons f de classe C^n, vérifiant les conditions de l'énoncé ; $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe C^{n-1} ; d'après $\mathcal{A}_{n-1}$, ψ_0 est de classe C^{n-1} ; les applications $x \longmapsto \partial_1 f(x, \psi_0(x))$ et $x \longmapsto \partial_2 f(x, \psi_0(x))$ sont de classe C^{n-1}.

D'autre part l'application $\theta : u \longmapsto u^{-1}$, que l'on peut définir implicitement à partir de $(u, v) \longmapsto u \circ v - Id_G$, elle même de classe C^∞, relève de cette étude et, d'après $\mathcal{A}_{n-1}$, est de classe C^{n-1}. On en déduit que

$$x \longmapsto (\partial_2 f(x, \psi(x))^{-1}$$

est de classe C^{n-1} et, d'après (1) que $\mathrm{d}\psi_0$ est de classe C^{n-1}. □

COROLLAIRE. — **L'application** $\theta : u \longmapsto u^{-1}$ **est de classe** C^∞.

8.5.4. Etude pratique des fonctions implicites

Ici E, F, G sont des e.v.n. de dimensions finies, et donc des espaces de Banach. L'existence d'un homéomorphisme linéaire de F sur G (en l'occurrence un isomorphisme d'espaces vectoriels) exige $\dim F = \dim G$, hypothèse que nous supposons remplie.

1° Nous pouvons nous ramener au cas où il s'agit de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^q$ rapportés à leurs bases canoniques. L'application f de l'ouvert W de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$ est alors déterminée par ses q composantes :

$$f_i : W \to \mathbb{R} \quad ((x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_q)) \longmapsto f_i(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \quad (i \in \mathbb{N}_q).$$

Soit $(a, b) = ((a_1, \ldots, a_p), (b_1, \ldots, b_q))$ un point de W.

Nous supposons que f est de classe C^n, $n \geqslant 1$, ce qui se traduit par le fait que les

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \ (i, k) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p, \ \text{ et les } \frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \ (i, j) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_q$$

existent et sont de classe C^{n-1} sur W.

L'hypothèse selon laquelle $\partial_2 f(a, b)$ est un homéomorphisme linéaire se traduit par la non-nullité du « jacobien partiel » au point (a, b), qui est, par définition :

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_q)}{D(y_1, \ldots, y_q)}(a, b) = \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \right|, \quad ((i, j) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_q).$$

Enfin la fonction implicite ψ est obtenue par ses composantes. Dans ces conditions nous avons donc :

THÉORÈME. — **Soit $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une application de classe C^n, $(n \geqslant 1)$, d'un ouvert W de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$, et (a, b) un point de W vérifiant**

$$f(a, b) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{D(f_1, \ldots, f_q)}{D(y_1, \ldots, y_q)}(a, b) \neq 0. \tag{1}$$

Alors il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^p$, un voisinage ouvert V de b dans $\mathbb{R}^q$ et une unique application $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_q)$ de U dans $\mathbb{R}^q$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} \psi \text{ prend ses valeurs dans } V \text{; pour tout } x \in U, \text{ on a :} \\ \forall i \in \mathbb{N}_q \quad f_i(x_1, \ldots, x_p, \psi_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \psi_q(x_1, \ldots, x_p)) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Cette application ψ est de classe C^n. Elle vérifie $\psi(a) = b$.

La matrice jacobienne de ψ au point $x = (x_1, \ldots, x_p)$ s'écrit $\mathfrak{J} = -\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{T}$ avec :

$$\mathfrak{T} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_p, \psi_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \psi_q(x_1, \ldots, x_p)) \right] \quad ((i, j) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p)$$

$$\mathfrak{Q} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x_1, \ldots, x_p, \psi_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \psi_q(x_1, \ldots, x_p)) \right] \quad ((i, k) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_q).$$

EXEMPLES IMPORTANTS ($q = 1$). *a*) **Cas de** $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$.

Ici (1) s'écrit : $f(a, b) = 0$ et $f'_y(a, b) \neq 0$.

On a : $\psi'(a) = -f'_x(a, b)/f'_y(a, b)$.

b) **Cas de** $f : ((x, y), z) \longmapsto f(x, y, z)$.

Ici (1) s'écrit : $f(a, b, c) = 0$ et $f'_z(a, b, c) \neq 0$.

On a : $\psi'_x(a, b) = -f'_x(a, b, c)/f'_z(a, b, c)$; $\psi'_z(a, b) = -f'_y(a, b, c)/f'_z(a, b, c)$.

Pour $n \geqslant 2$, à partir de :

$$\psi'_x(x, y) = -f'_x(x, y, \psi(x, y))/f'_z(x, y, \psi(x, y))$$

la dérivation d'une application composée fournit $\psi''_{x^2}(a, b)$ sous la forme :

$$\frac{-(f'_z(\mathbf{a}))^2 \cdot f''_{x^2}(\mathbf{a}) + 2f'_x(\mathbf{a})\, f'_z(\mathbf{a})\, f''_{xz}(\mathbf{a}) - (f'_x(\mathbf{a}))^2 \cdot f''_{z^2}(\mathbf{a})}{(f'_z(\mathbf{a}))^3}$$

où $\mathbf{a}$ est mis pour (a, b, c).

2° ***Applications à la géométrie.*** — Ces applications sont traitées dans le tome V.

8.5.5. Inversion locale d'une fonction

1° ***Difféomorphisme de classe C^n.*** — Etendons une définition donnée au **4**.3.*3*, 3° en posant :

DÉFINITION. — **Soient E et F des e.v.n., U un ouvert de E et V un ouvert de F, $f : U \to V$ une bijection, et n un entier naturel non nul. On dit que f est un C^n-difféomorphisme si, et seulement si f et f^{-1} sont de classe C^n, (ce qui signifie que les applications $U \to F$ et $V \to E$ qui coïncident respectivement avec f sur U et avec f^{-1} sur V sont de classe C^n).**

Cette définition implique d'une part que f est un homéomorphisme (trivial), d'autre part que pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}f(a)$ est un homéomorphisme linéaire de E sur F. Posons en effet $b = f(a)$ et $g = f^{-1}$.

De $g \circ f = Id_U$, on déduit $\mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a) = Id_E$.

De $f \circ g = Id_V$, on déduit $\mathrm{d}f(a) \circ \mathrm{d}g(b) = Id_F$. D'où $\mathrm{d}g(b) = (\mathrm{d}f(a))^{-1}$.

Lorsque E et F sont de dimension finie, il faut[1] donc que $\dim E = \dim F$.

Les remarques du **4**.3.*3*, 2° s'étendent sans difficulté.

2° THÉORÈME D'INVERSION LOCALE. — **Soient E et F des espaces de Banach, W un ouvert de E, $f : W \to F$ une application de classe C^n ($n \geqslant 1$), a un point de W tel que $\mathrm{d}f(a)$ soit un homéomorphisme linéaire de E sur F. Alors il existe**

---

[1] On démontre qu'il ne peut exister un homéomorphisme d'un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^q$ que si $p = q$.

un ouvert A de E tel que $\{a\} \subset A \subset W$, un voisinage ouvert B de $b = f(a)$ dans F, et un C^n-difféomorphisme de A sur B qui coïncide avec f sur A.

En posant $f_1(x, y) = f(x) - y$ nous définissons une application de classe C^n de l'ouvert $W \times F$ de $E \times F$ dans F telle que $\partial_1 f_1(a, b) = \mathrm{d}f(a)$ soit un homéomorphisme. Nous pouvons appliquer à f_1 le théorème des fonctions implicites (les rôles de F et E, et donc de x et y étant échangés par rapport aux notations des paragraphes précédents).

Il existe un voisinage ouvert B de b dans F, un ouvert V de E tel que $\{a\} \subset V \subset W$ et une unique application $g : B \to E$ vérifiant :

$$\forall y \in B \qquad (g(y) \in V) \wedge (f(g(y)) = y). \tag{1}$$

Cette application g est de classe C^n.

Considérons $A = V \cap f^{-1}(B)$ qui, du fait de la continuité de f, est un voisinage ouvert de a dans E. L'application g prend ses valeurs dans A et on déduit de (1) que l'application $g_B : B \to A$ qui coïncide avec g sur B est une bijection, dont la bijection réciproque est l'application $f_A : A \to B$ qui coïncide avec f sur A ; f_A répond à la question. □

3° Corollaire. — **Soit f une application injective de classe C^n ($n \geqslant 1$) de l'ouvert U de l'espace de Banach E dans l'espace de Banach F; posons $V = f(U)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :**

i) Pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}f(x)$ est un homéomorphisme linéaire.

ii) V est ouvert et la bijection $U \to V$ qui coïncide avec f sur U (et qui est elle aussi, notée f) est un C^n-difféomorphisme.

ii) $\Longrightarrow$ *i)* A été prouvé au 1°.

i) $\Longrightarrow$ *ii)* Par hypothèse *i)* est vraie. Soit b un point de V ; f étant injective, il existe un unique point $a \in U$ tel que $f(a) = b$; notons le $f^{-1}(b)$. D'après le 2° il existe un ouvert A de E tel que $\{a\} \subset A \subset U$, un ouvert B de F tel que $\{b\} \subset B \subset V$, et un C^n-difféomorphisme h de A sur B qui coïncide avec f sur A. On en déduit d'une part que V est un ouvert de F, d'autre part que f^{-1} et h^{-1} coïncident sur B, ce qui entraîne que f^{-1} est de classe C^n sur B. Comme b est un point arbitraire de V, f^{-1} est de classe C^n sur V. □

Exemple. — *Passage en coordonnées polaires.*

Soient : $U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho > 0 \text{ et } -\pi < \theta < \pi\}$

$V = \mathbb{R}^2 \backslash I$, avec $I = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}_-\}$

$f : U \to \mathbb{R}^2 \qquad (\rho, \theta) \longmapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

On notera : $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$.

On constate aisément que f est de classe C^∞ et prend ses valeurs dans V ; en effet, du fait de $\rho > 0$, les deux égalités simultanées $\rho \cos \theta \leqslant 0$ et $\rho \sin \theta = 0$ exigeraient $\cos \theta \leqslant 0$ et $\sin \theta = 0$, ce qui est incompatible avec $-\pi < \theta < \pi$.

Tout $(x, y) \in V$ est l'image par f d'un et un seul $(\rho, \theta) \in U$. En effet on a d'abord $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui est strictement positif. Ensuite :

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \qquad \text{et} \qquad \sin \theta = \frac{y}{\rho}$$

déterminent un et un seul $\theta \in]-\pi, \pi]$. En fait on a $\theta \in]-\pi, \pi[$, car $\theta = \pi$ exigerait $(x, y) \in I$, ce qui est exclus.

Enfin :
$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

n'est nul en aucun point de U. La condition *i*) est remplie. On en déduit que f est un C^{∞}_{-} difféomorphisme de U sur V.

REMARQUES. — *a*) A titre d'exercice le lecteur pourra calculer :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = 2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

ce qui rend le résultat évident.

b) On peut remplacer I par une autre demi-droite ouverte de $\mathbb{R}^2$ d'extrémité (0, 0), à condition de modifier U en conséquence.

8.5.6. Application au changement de variables

1° ***Théorie.*** — Nous reprenons l'étude de la composition des fonctions numériques (8.1.7, 4°), dans un cas particulier. Considérons les applications de classe C^n $(n \geqslant 1)$:

$$f: U \to \mathbb{R}^p \qquad x = (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto (f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_p))$$
$$g: V \to \mathbb{R} \qquad y = (y_1, \ldots, y_p) \longmapsto g(y_1, \ldots, y_p)$$

où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^p$ tels que $f(U) \subset V$. On dispose de

$$g^* = g \circ f : U \to \mathbb{R} \quad (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto g(f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_p)).$$

(L'étude s'étendrait à $g : V \to \mathbb{R}^m$, en étudiant séparément chaque composante de g).

2° ***Changement de variables.*** — Nous supposons même que f induit un C^n-difféomorphisme (noté f) de U sur V; soit φ le C^n-difféomorphisme réciproque :

$$\varphi : y = (y_1, \ldots, y_p) \longmapsto (\varphi_1(y_1, \ldots, y_p), \ldots, \varphi_p(y_1, \ldots, y_p)).$$

En général on ne sait pas expliciter φ ; en revanche, on sait expliciter $\mathrm{d}\varphi \circ f : U \to (\mathbb{R}^p)^*$, puisque, d'après 8.5.5, 1° :

$$\forall x \in U \qquad \mathrm{d}\varphi(f(x)) = (\mathrm{d}f(x))^{-1}$$

ce qui s'écrit, en faisant intervenir les matrices jacobiennes $J_f(x)$ et $J_\varphi(f(x))$:

$$\forall x \in U \qquad \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(f(x))\right]_{(i,j)\in(\mathrm{N}_p)^2} = \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{(i,j)\in(\mathrm{N}_p)^2}\right]^{-1}.$$

En d'autres termes : *pour tout $x \in U$, on sait expliciter les dérivées partielles des composantes de φ au point $f(x)$ en fonction de celles des composantes de f au point x.*

Pour cela (I.**11**.2.*4*) on associe à $J_f(x)$ un système de Cramer, qu'il est commode, mais non indispensable, d'écrire sous la forme suivante :

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x_j, \qquad i \in \mathbb{N}_p \tag{1}$$

en désignant l'*inconnue* par $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_p) \in \mathbb{R}^p$ et le *paramètre* par $(\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_p) \in \mathbb{R}^p$.

On écrit que, pour toute valeur du paramètre, la solution est de la forme

$$\mathrm{d}x_j = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}(f(x))\,\mathrm{d}y_i, \quad j \in \mathbb{N}_p. \tag{2}$$

Dans la pratique, on note $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ pour $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ et $\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$ pour $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}(f(x))$. Ainsi :

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\,; \tag{1}$$

$$\mathrm{d}x_j = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y_i \tag{2}$$

formules qu'il est aisé de retenir grâce à l'*invariance de la différentielle.*

Cela s'explique en introduisant les bases $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_p)$ et $(\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_p)$ de $(\mathbb{R}^p)^*$, et en considérant $J_p(x)$ comme une matrice de changement de base, étant entendu que la signification des symboles $\mathrm{d}x_j$ et $\mathrm{d}y_i$ n'est alors plus la même.

EXEMPLE. — *Passage aux coordonnées polaires.*

$f : U \to V$ est ici le C^∞-difféomorphisme de **8**.5.5, 3° (exemple). On a :

$$f_1 : (\rho, \theta) \longmapsto x = \rho\cos\theta \ ; \qquad f_2 : (\rho, \theta) \longmapsto y = \rho\sin\theta$$

$$\varphi_1 : (x, y) \longmapsto \rho = \varphi_1(x, y)\,; \qquad \varphi_2 : (x, y) \longmapsto \theta = \varphi_2(x, y).$$

Le système (1) s'écrit, en notation abrégée :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}\rho - \rho\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \sin\theta\,\mathrm{d}\rho + \rho\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}; \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} \mathrm{d}\rho = \cos\theta\,\mathrm{d}x + \sin\theta\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\,\mathrm{d}y \end{cases}$$

et : $$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\theta\,; \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\theta\,; \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{\rho}\,; \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho},$$

étant entendu que $\frac{\partial\rho}{\partial x}$ est mis pour $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, etc.

3° ***Composition des fonctions.*** — On reprend f étudié au 2°, et on introduit les applications g et $g^* \circ f$, de classe C^n.

Pour tout $x \in U$, on sait calculer les dérivées partielles de g au point $f(x)$, en fonction des dérivées partielles de g^* au point x. En effet, on a (**8**.1.*7*, 5°) :

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(x)) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g^*}{\partial x_j}(x)\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}(f(x)), \quad i \in \mathbb{N}_p \tag{3}$$

$$\frac{\partial g^*}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(x))\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \quad j \in \mathbb{N}_p. \tag{4}$$

On résout, sous la forme (3), le système linéaire (4) à l'inconnue

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)), \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_p}(f(x))\right),$$

qui est cramérien puisque dét $(J_f(x)) \neq 0$.

On peut aussi porter dans (3) les expressions des $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}(f(x))$ obtenues au 2°.

Dans la pratique on note $\frac{\partial g}{\partial y_i}$ et $\frac{\partial g^*}{\partial x_j}$ pour $\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(x))$ et $\frac{\partial g^*}{\partial x_j}(x)$, et on retient (3) et (4) grâce à l'*invariance de la différentielle.*

Exemple. — *Passage aux coordonnées polaires.*

De : $\frac{\partial g^*}{\partial \rho} = \cos\theta \frac{\partial g}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial g}{\partial y}$; $\frac{\partial g^*}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta \frac{\partial g}{\partial x} + \rho\cos\theta \frac{\partial g}{\partial x}$ (4)

on déduit : $\frac{\partial g}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial g^*}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial g^*}{\partial \rho}$; $\frac{\partial g}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial g^*}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho} \frac{\partial g^*}{\partial \rho}$ (3)

étant entendu que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est mis pour $\frac{\partial g}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, etc.

Pour obtenir les dérivées partielles du second ordre de g en fonction de celles de g^*, on remplace dans (2) g par $\frac{\partial g}{\partial x}$ ou $\frac{\partial g}{\partial y}$. Par exemple :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\theta \frac{\partial g^*}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial g^*}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta \frac{\partial g^*}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial g^*}{\partial \theta}\right).$$

A titre d'exercice le lecteur pourra calculer le *laplacien* :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g^*}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g^*}{\partial \theta^2}.$$

Exercice. — *Soit l'équation aux dérivées partielles*

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (k \in \mathbb{R}_+^*)$$

Il s'agit de trouver toutes les applications $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

(Lorsque x est une variable réelle et y une variable temporelle, il s'agit du mouvement d'une corde vibrante au voisinage d'une position d'équilibre. Dans le problème physique, k désigne $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, où T est la tension moyenne de la corde et ρ la masse de l'unité de longueur, si bien que k a la dimension d'une vitesse). Effectuons le changement de variable défini par :

$$\begin{cases} u = x + ky \\ v = x - ky \end{cases} \quad \text{qui s'écrit} \quad \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2k. \end{cases}$$

Un calcul direct donne ici :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g^*}{\partial u} + \frac{\partial g^*}{\partial v} \; ; \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = k\left(\frac{\partial g^*}{\partial u} - \frac{\partial g^*}{\partial v}\right).$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g^*}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g^*}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g^*}{\partial v^2} \; ; \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = k^2\left(\frac{\partial^2 g^*}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g^*}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g^*}{\partial v^2}\right).$$

Il en résulte que g vérifie (E) si, et seulement si g^* vérifie (E_1) :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, l'application $v \longmapsto \frac{\partial g^*}{\partial u}(u, v)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ doit être constante, ce qui exige l'existence d'une application $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial g^*}{\partial u}(u, v) = \psi(u).$$

En outre, $\frac{\partial g^*}{\partial u}$ devant être de classe C^1, il doit en être de même pour ψ.

Désignant par Ψ l'une quelconque des primitives de ψ, on constate ensuite qu'il doit exister une application $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, telle que :

$$\forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \qquad g^*(u, v) = \Psi(u) + \Phi(v). \tag{7}$$

Inversement, lorsque Ψ et Φ désignent deux applications de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, arbitrairement choisies, l'application g^* définie par (7) est de classe C^2 et vérifie (E_1).

En conclusion, les solutions de classe C^2 de (E) sont données par :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x, y) = \Psi(x+ky) + \Phi(x-ky)$$

où Ψ et Φ sont deux applications de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, arbitrairement choisies.

8.5.7. Extremums liés

Commençons par étudier un exemple. Soit f une application d'un ouvert U d'un e.v.n. E dans $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}$ un point de U en lequel f est différentiable, A un sous-espace affine de E contenant $\boldsymbol{a}$, c'est-à-dire une partie de E de la forme $A = \{\boldsymbol{x} \in E | (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \in E'\}$ où E' est un sous-espace vectoriel de E.

Nous nous proposons de trouver une condition nécessaire pour que la restriction de f à $U' = U \cap A$, qui est un ouvert de A, admette un extremum en $\boldsymbol{a}$. En reprenant le raisonnement du **8**.1.*2*, 4°, on constate que cette restriction admet au point $\boldsymbol{a}$ une différentielle, qui est la restriction de $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$ à E' (en l'occurrence une forme linéaire sur E'). Cette forme linéaire doit donc nécessairement être nulle.

Plaçons nous, par exemple, dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$. Notons $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ et $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$, et supposons que A est le plan affine :

$$\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c) = 0 \quad ((\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^*)^3)$$

Comme $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$ s'écrit : $(h, k, l) \longmapsto hf'_x(\boldsymbol{a}) + kf'_y(\boldsymbol{a}) + lf'_z(\boldsymbol{a})$, sa restriction au plan vectoriel E', d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma z = 0$, s'écrit, dans une base convenablement choisie de E' :

$$(h, k) \longmapsto hf'_x(\boldsymbol{a}) + kf'_y(\boldsymbol{a}) - \frac{\alpha h+\beta k}{\gamma} f'_z(\boldsymbol{a}).$$

Elle est nulle si, et seulement si :

$$\frac{f'_x(a)}{\alpha} = \frac{f'_y(a)}{\beta} = \frac{f'_z(a)}{\gamma}.$$

Venons en maintenant au cas général.

THÉORÈME. — **Soient f, g_1, ..., g_m des fonctions numériques de classe C^1 définies sur un ouvert U d'un e.v.n. E. On désigne par A l'ensemble :**

$$A = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}$$

Tout extremum relatif de la restriction de f à A est dit *extremum lié de f pour les conditions $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$.*

Si la restriction de f à A admet un tel extremum en un point a tel que $\mathrm{d}g_1(a)$, ..., $\mathrm{d}g_m(a)$ soient des formes linéaires indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — appelés *multiplicateurs de Lagrange* **— tels que :**

$$\mathrm{d}f(a) = \lambda_1 \,\mathrm{d}g_1(a) + \dots + \lambda_m \,\mathrm{d}g_m(a).$$

PREMIER CAS PARTICULIER : $E = \mathbb{R}^m$. — Ici $(\mathrm{d}g_1(a), \dots, \mathrm{d}g_m(a))$ est une base du dual de E ; $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les coordonnées de $\mathrm{d}f(a)$ dans cette base.

SECOND CAS PARTICULIER : $E = \mathbb{R}^{m+1}$. — En remplaçant éventuellement U par un ouvert plus petit, on peut obtenir (8.5.4, 3°) une représentation paramétrique de A de la forme

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1} \qquad t \longmapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_{m+1}(t))$$

où t est l'une des coordonnées $x_1, \dots, x_{m+1}$, et où V est un voisinage d'un point $t_0 \in V$ tel que $a = \varphi(t_0)$. On sait que les m hyperplans H_i de $\mathbb{R}^{m+1}$ d'équations $\mathrm{d}g_i(a)\cdot x = 0$, qui forment une famille de rang m, ont pour intersection la droite $\mathbb{R}\varphi'(t_0)$.

D'autre part, pour que la restriction de f à A admette un extremum en a, il est nécessaire que $f \circ \varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$, qui est de classe C^1, admette un extremum en t_0, ce qui exige $\mathrm{d}f(a)\cdot\varphi'(t_0) = 0$. L'hyperplan de $\mathbb{R}^{m+1}$ d'équation $\mathrm{d}f(a)\cdot x = 0$ doit ainsi contenir l'intersection des H_i. D'après I.8.3.6 *in fine*, cela exige que $\mathrm{d}f(a)$ soit combinaison linéaire des $\mathrm{d}g_i(a)$.

Notons que cela se traduit (compte tenu de l'indépendance des $\mathrm{d}g_i(a)$) par la nullité au point a du déterminant :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}} \end{vmatrix}$$

CAS GÉNÉRAL. — Nous utiliserons le lemme suivant :

• LEMME. – *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(l_1, \ldots, l_m)$ des formes linéaires indépendantes sur E. Étant donné $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$, il existe un vecteur $x \in E$, au moins tel que : $\forall i \in \mathbb{N}_m$, $l_i(x) = \lambda_i$.*

Si E est de dimension finie (nécessairement au moins égale à m), il s'agit d'une conséquence immédiate de la théorie des équations linéaires. En première lecture, on se limitera à ce cas. Pour démontrer le lemme dans le cas général, on utilise :

$$\varphi : E \to \mathbb{K}^m \qquad x \longmapsto (l_1(x), \ \ldots, \ l_m(x))$$

qui est visiblement une application linéaire. Il s'agit de montrer que φ est surjective.

Raisonnant par l'absurde, supposons que φ n'est pas surjective. C'est que le sous-espace $\varphi(E)$ est distinct de $\mathbb{K}^m$ est donc contenu dans un hyperplan H de $\mathbb{K}^m$ (théorème de la base incomplète en dimension finie). On sait qu'il existe une forme linéaire sur $\mathbb{K}^m$, ψ, non nulle et de noyau H. Soit $(e_1^*, \ldots, e_m^*)$ la base canonique de $(\mathbb{K}^m)^*$; on a :

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i^*$$

où le *m-uplet* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ n'est pas nul (à cause de $\psi \neq 0$). Pour tout $x \in E$, on a $\psi(\varphi(x)) = 0$. Or :

$$\psi(\varphi(x)) = \psi(l_1(x), \ \ldots, \ l_m(x)) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i l_i(x)$$

Ainsi $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i l_i$ est la forme linéaire nulle sur E, ce qui constitue une contradiction avec l'hypothèse selon laquelle $(l_1, \ldots, l_m)$ sont des formes linéaires indépendantes.

• Revenons à la démonstration du théorème. Pour tout $i \in \mathbb{N}_m$ le lemme nous apprend qu'on peut trouver un vecteur $e_i \in E$ tel que

$$\forall j \in \mathbb{N}_m \qquad \mathrm{d}g_j(a) \cdot e_i = \delta_{ij} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

La famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}_m}$ est libre ; en effet la relation $\sum_i \alpha_i e_i = 0$ implique $\mathrm{d}g_j(a) \cdot \sum_i \alpha_i e_i = 0$, et donc $\alpha_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_m$.

Soit v un vecteur quelconque de E. Posons :

$$E_0 = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_m) ; \ E_1 = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_m, v) ; \quad B = \{x \in E \mid x - a \in E_1\}$$

Selon que $v \in E_0$ ou $v \notin E_0$, la dimension de E_1 est m ou $m+1$. Ecrivons que la restriction de f à $A \cap B$ présente un extremum au point a. On est dans

l'un des cas particuliers : il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que la forme linéaire

$$l = \mathrm{d}f(a) - \sum_i \lambda_i \, \mathrm{d}g_i(a)$$

prenne la valeur 0 sur tout vecteur de E_1. Les λ_i semblent *a priori* dépendre de v. En fait il n'en est rien car on constate, en écrivant $l(e_i) = 0$, que λ_i n'est autre que $\mathrm{d}f(a)\cdot e_i$. Finalement la forme linéaire $\mathrm{d}f(a) - \sum_i (\mathrm{d}f(a)\cdot e_i)\,\mathrm{d}g_i(a)$ prend la valeur 0 sur tout vecteur $v \in E$. Elle est donc nulle. □

Pratique. — Les notations sont celles du théorème. On suppose en outre qu'en tout point $x \in U$ les formes $\mathrm{d}g_1(x), \ldots, \mathrm{d}g_m(x)$ sont indépendantes. Une condition nécessaire pour que f admette en $x \in U$ un extremum lié, pour les conditions données, est :

$$g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0 \,; \quad \exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$$
$$\mathrm{d}f(x) = \lambda_1 \, \mathrm{d}g_1(x) + \ldots + \lambda_m \, \mathrm{d}g_m(x).$$

Il s'agit d'un système aux inconnues $x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Si $\dim E = n$, on a $m+n$ équations scalaires et $n+m$ inconnues.

EXEMPLE. — *Dans* $\mathbb{R}^3$ *affine euclidien, on considère l'ellipsoïde*

$$(E) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad 0 < c < b < a.$$

Etudier les extremums de la distance d'un point M de E au centre O.

Il s'agit des extremums de $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$, fonction de trois variables x, y, z liées par $g(x, y, z) = 0$ avec $g(x, y, z) = x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2-1$. Toutes les fonctions sont polynomiales, et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$; d'autre part $\mathrm{d}g(M) \neq 0$, pour tout $M \in E$.

Une condition nécessaire pour que $M = (x, y, z)$ fournisse un extremum de la restriction de f à E est :

$$\begin{cases} g(M) = 0 \\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \;\; \mathrm{d}f(M) = \lambda \, \mathrm{d}g(M) \end{cases}$$

La seconde condition traduit l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'_x(M) = \lambda g'_x(M) \,; \qquad f'_y(M) = \lambda g'_y(M) \,; \qquad f'_z = \lambda g'_z(M)$$

ce qui s'explicite sous la forme :

$$(a^2-\lambda)x = 0 \,; \qquad (b^2-\lambda)y = 0 \,; \qquad (c^2-\lambda)z = 0 \tag{1}$$

Comme $O = (0, 0, 0)$ ne vérifie pas $g(M) = 0$, λ est nécessairement l'un des réels a^2, b^2, c^2. Si λ est a^2, alors (1) exige $y = z = 0$, et ainsi de suite. Les seuls points de E susceptibles de fournir un extremum lié sont donc les *sommets* $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$.

Pour étudier $f|E$ au voisinage de $A = (a, 0, 0)$, remarquons que, pour tout $M \in E$:

$$f(M) - f(A) = x^2+y^2+z^2 - a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right).$$

D'où : $f(M)-f(A) = (1-a^2/b^2)y^2+(1-a^2/c^2)z^2 \leqslant 0.$

Ainsi $f|E$ admet un maximum aux points $(a, 0, 0)$ et $(-a, 0, 0)$, et — ainsi qu'on le montrerait par un calcul analogue — un minimum aux points $(0, 0, c)$ et $(0, 0, -c)$. Il s'agit d'ailleurs d'extremums absolus.

Soit $B = (0, b, 0)$. Pour $M \in E$ on a :

$$f(M)-f(B) = (1-b^2/a^2)x^2+(1-b^2/c^2)z^2.$$

La restriction de f à l'ellipse $(x^2/a^2+y^2/b^2-1 = 0,\ z = 0)$ admet un minimum en B, alors que la restriction de f à l'ellipse $(y^2/b^2+z^2/c^2-1 = 0,\ x = 0)$ admet un maximum en B. Il en résulte que $f|E$ n'admet pas d'extremum en B.

Notons que, E étant un compact de $\mathbb{R}^3$, on savait à l'avance que $f|E$ admettait un maximum absolu et un minimum absolu.

EXERCICES

Applications différentiables

8.01. — On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Etudier f sur $\mathbb{R}^2$. (Continuité, différentiabilité). Calculer $f''_{xy}(0, 0)$ et $f''_{yx}(0, 0)$; que peut-on déduire du résultat ?

8.02. — Pour chacune des fonctions suivantes étudier la continuité, la dérivabilité et la différentiabilité en $(0, 0)$. Chacune est définie par $f(0, 0) = 0$ et par $f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, à savoir :

$$\frac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ; \quad \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}\ (\alpha \in \mathbb{R}_+) ;$$

$$(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ; \quad \frac{e^{x^4}-e^{y^4}}{(x^2+y^2)^2}$$

8.03. — Continuité et différentiabilité de :

$$(x^2+y^2+z^2)\sin\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n}\ ; \qquad \frac{x^3+y^3+z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(dans les mêmes conditions que pour l'exercice précédent).

8.04. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto \operatorname{Arc\,cos} \dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$

Trouver Déf. f. Trouver un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est différentiable. Calculer $df(x, y)$, pour $(x, y) \in U$. Interpréter le résultat.

8.05. — Reprendre la question précédente avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \longmapsto \operatorname{Arc\,cos} \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy} + \operatorname{Arc\,cos} \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz} + \operatorname{Arc\,cos} \frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}$$

8.06. — E désigne l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont le degré n'excède pas n, rapporté à sa base $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Calculer les dérivées partielles de l'application

$$\varphi : E \to \mathbb{R} \qquad P \longmapsto \int_0^1 f(t, P(t))\,\mathrm{d}t$$

φ est-elle différentiable ?

8,07. — Soient $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n, et I la matrice unité de $\mathcal{M}$.

a) Montrer que l'application $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \quad X \longmapsto X^2$ admet en tout $X \in \mathcal{M}$ la différentielle

$$\mathrm{d}f(X) : H \longmapsto XH + HX.$$

b) Soit $E = \{X \in \mathcal{M} \mid X^2 = I\}$. Montrer que I et $-I$ sont des points isolés de E. En est-il de même de $J = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1)$?

8.08. — Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.

a) Montrer que l'application $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \qquad X \longmapsto X\,{}^tX$ est différentiable.

b) Existe-t-il $X \in \mathcal{M}$ tel que $\mathrm{d}f(X)$ soit un isomorphisme ?

c) Montrer que l'application $g : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \qquad X \longmapsto \det X$ est différentiable.

8.09. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$. Montrer que l'application

$$E \to \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \langle x, x \rangle$$

est différentiable sur E. Quelle est sa différentielle ?

En déduire que l'application $x \longmapsto \|x\|$ est différentiable sur $E \backslash \{0\}$.

8.10. — Soit E l'espace des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\| = \sup\limits_{t \in [a, b]} |f(t)|$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application deux fois continûment dérivable. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_a^b \varphi[f(x)]\,\mathrm{d}x$ est différentiable. Est-elle de classe C^1 ?

8.11. — Lemme de Rolle. — Soient A une partie compacte d'intérieur non vide d'un e.v.n., et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue sur A, différentiable sur $\mathring{A}$, constante sur $A/\mathring{A}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathring{A}$ tel que $\mathrm{d}f(c) = 0$. (On pourra utiliser **8**.3.3).

8.12. — Soit l_0 l'ensemble des suites (a_n) réelles telles que $\lim (a_n) = 0$.

a) Montrer que l_0 est un espace de Banach pour la norme définie sur l_0 par $\|(a_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

b) Soit $\varphi_p : l_0 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_p((a_n)) = |a_p|$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que φ_p soit différentiable au point (a_n) de l_0 est $a_p \neq 0$.

c) Soit $f: l_0 \to \mathbb{R}$ définie par $f((a_n)) = \|(a_n)\|$. Montrer qu'en tout point (a_n) tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $|a_n| < |a_p|$ pour $n \neq p$, f est différentiable.

Que peut-on dire en un point (a_n) tel qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \neq q$ tels que $\|(a_n)\| = |a_p| = |a_q|$?

8.13. — Soit E l'espace des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées, ainsi que leurs deux premières dérivées. On munit E de la norme $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

a) On fixe $g \in E$. Montrer que les applications $f \longmapsto f \circ g$ et $f \longmapsto g \circ f$ de E dans lui-même sont différentiables, et indiquer leur différentielle en $f \in E$.

b) On considère $\theta : E \to E$, qui à $f \in E$ associe $f \circ f$. Montrer que θ n'est pas différentiable en $0 \in E$. (On se fixe $h \in E$ et, en étudiant $\alpha(t) = \theta(th)$, $(t \in \mathbb{R})$, on montre que si θ était différentiable en 0, nécessairement on aurait $d\theta(0) : h \longmapsto h(0)$, en notant $h(0)$ l'application constante $t \longmapsto h(0)$; en considérant $h_n : t \longmapsto \frac{1}{n} h(nt)$ on aboutirait à une contradiction).

Fonctions implicites

8.14. — Soient E et F deux Banach, U un ouvert de E contenant 0_E et f une application de classe C^1 de U dans $\mathcal{L}(E, F)$. On considère l'application g de U dans F définie par $g(x) = f(x) \cdot x$.

Montrer que si $f(0_E)$ est un isomorphisme de E sur F, il existe un voisinage ouvert V de 0_E et un voisinage ouvert W de 0_F tel que g soit un C^1 difféomorphisme de V sur W.

8.15. — Soient E un espace de Banach et θ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui à $l \in \mathcal{L}(E)$ fait correspondre $l \circ l$. Montrer que θ est un C^∞ difféomorphisme d'un voisinage de Id_E sur un voisinage de Id_E.

8.16. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $(x, y) \longmapsto (u, v)$ avec :

$$u = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}, \qquad v = (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}).$$

a) Etudier la différentiabilité de f. Calculer le jacobien de f en un point de $\mathbb{R}^2$.

b) L'application f est-elle inversible ? Déterminer et construire $f(\mathbb{R}^2)$.

8.17. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \longmapsto \left(\frac{u^3+v^3}{v(u^2+v^2)}, \frac{u^3-v^3}{v(u^2+v^2)}, \frac{uv^3}{u^4+v^4}\right)$.

a) Trouver Déf f. Trouver un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est différentiable. Calculer la matrice jacobienne et le rang de f en un point de U.

8.18. — Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \longmapsto (x+y, y/x, z/x)$.

a) Trouver Déf (f). Trouver un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ sur lequel f est différentiable. Calculer la matrice jacobienne et le jacobien de f en un point de U.

b) Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x > 0) \wedge (x+y > 0)\}$; f établit-elle un homéomorphisme de V sur $f(V)$?

8.19. — Soit $\mathcal{C}^0$ l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, normé par $\|f\|_0 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Soit $\mathcal{C}^1$ l'espace des applications continûment dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0, normé par $\|f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$.

On considère l'application $\varphi : \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^0 \quad f \longmapsto f'+f^2$.

a) L'application φ est-elle différentiable ?

b) En utilisant le théorème d'inversion locale, montrer que l'équation :

$$f' + f^2 = g$$

où g est un élément donné de $\mathcal{C}^0$, a une solution dans $\mathcal{C}^1$ pourvu que $\|g\|_0$ soit « assez petite ».

8.20. — Soient $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ln x + x \ln y = \ln 2\}$ et $a = (1, 2)$.

Tracer la « courbe » S au voisinage du point a.

8.21. — Tracer la « courbe » $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \sin y = y \sin x\}$.

8.22. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 telle que f' ne prenne pas la valeur 0. Montrer qu'à tout $t_0 \in \mathbb{R}$ on peut associer un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ de centre t_0, une boule $B \subset \mathbb{R}^2$ de centre $f(t_0)$ et un C^1-difféomorphisme $\varphi : B \to \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\varphi[f(J)] \subset \mathbb{R} \times \{0\}.$$

8.23. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On lui associe l'application

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \longmapsto f(x, y) - z.$$

a) Au voisinage d'un point (a, b, c) tel que $f'_x(a, b) \neq 0$, la relation $g(x, y, z) = 0$ permet de définir x comme fonction implicite de (y, z), soit $x = \varphi(y, z)$. Calculer $\varphi'_y, \varphi'_z, \varphi''_{yz}$.

b) Résoudre localement l'équation : $f''_{xy}\, f'_x - f''_{x^2} f'_y = 0$.

8.24. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Sous une condition que l'on précisera, la relation $y - zx = f(z)$ définit localement z comme fonction implicite de (x, y) Montrer qu'on a alors :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z\, \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

8.25. — Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Sous une condition que l'on précisera, la relation

$z-x-yf(z) = 0$ définit localement z comme fonction implicite ψ de (x, y), et on a :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right].$$

$\left(z \text{ et } \dfrac{\partial z}{\partial x} \text{ sont mis pour } \psi(x, y) \text{ et } \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x, y)\right)$.

8.26. — Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Sous une condition que l'on précisera la relation

$$f\left(\operatorname{Arc\,tg}\frac{x+2y+1}{y+2x+1},\ \operatorname{Arc\,tg}\frac{y+2x+1}{x+2y+1}\right) = 0$$

définit y comme fonction implicite de x. Calculer $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

8.27. — Rechercher les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, de classe C^2, vérifiant, pour tout (x, y) appartenant à un ouvert convenablement choisi du plan :

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$

b) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 3xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 2y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$

$\left(\text{on posera : } \varphi(x, y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

(on posera $u = x+y$, $v = x-y$).

8.28. — Soit $f:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 ; on lui associe

$$g : D \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right).$$

Déterminer f pour que g vérifie : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0$, pour tout (x, y) élément de l'ouvert D de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.

8.29. — Rechercher des solutions de l'équation à l'inconnue $z = f(x, y)$:

$$z\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x}\right) + x^2 + y^2 = 0,$$

au moyen du changement de variables et de fonction inconnue

$$u = y/x, \quad v = x^2+y^2, \quad \varphi(x, y) = f^2(x, y).$$

(On recherchera des solutions de classe C^1 sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$).

Fonctions homogènes

8.30. — Trouver tous les polynômes (resp. les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1) k-positivement homogènes ($k \in \mathbb{N}$) tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad y f'_x(x, y) - x f'_y(x, y) = 0.$$

8.31. — Soit f une application n-positivement homogène d'un cône ouvert C de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, deux fois différentiable. Montrer

$$\forall (x, y) \in C \qquad \left[x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]^{[2]} = n(n-1) f(x, y)$$

La réciproque est-elle vraie ?

8.32. — Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ des applications de classe C^1 telles que

$$\forall (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \qquad f(tx, ty, tz) = \varphi(t) f(x, y, z)$$

$$[\text{resp. } \forall (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \quad f((1+t)x, e^t y, (1+\sin t)z) = \varphi(t) f(x, y, z)].$$

Montrer que f est positivement homogène.

Problèmes d'extremums libres ou liés

8.33. — Extremums de $(x, y) \longmapsto \sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2}$.

8.34. — Extremums de : $(x, y) \longmapsto \int_0^\pi (\sin t - (xt^2+yt))^2 \, dt$

8.35. — Extremums de : $(x, y) \longmapsto xe^y + ye^x$.

8.36. — On donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $(x, y) \longmapsto (ax^2+by^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$ admet-elle des bornes dans $\mathbb{R}^2$? Ces bornes sont-elles atteintes ?

8.37. — On donne trois points a, b, c d'un plan euclidien. Etudier les extremums de la fonction $m \longmapsto \|am\|^2 + \|bm\|^2 + \|cm\|^2$.

8.38. — Extremums de la fonction $(x, y) \longmapsto \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

8.39. — On donne une application continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période 2π. On désigne par E l'espace vectoriel d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont une base est

$$\left(e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\ e_2 = \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\ \dots,\ e_{2n-1} = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\ e_{2n} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \right)$$

Rechercher les extremums de l'application.

$$F : E \to \mathbb{R} \qquad f = \sum_{i=0}^{2n} x_i e_i \longmapsto \int_0^{2\pi} [f(t) - \varphi(t)]^2 \, dt.$$

Montrer que l'on obtient un minimum.

8.40. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad |f'(t)| \leqslant k < 1.$$

On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$(x, y) \longmapsto (u(x, y) = x + f(y), \; v(x, y) = y + f(x)).$$

a) Montrer que g est surjective. Pour cela, on prouvera que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \longmapsto (a - u(x, y))^2 + (b - v(x, y))^2$$

admet un minimum en un point (α, β) tel que $g(\alpha, \beta) = (a, b)$.

b) Montrer que g est bijective.

8.41. — On donne la matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_R(n, n)$, la matrice-colonne $B \in \mathcal{M}_R(n, 1)$ et le réel c. On suppose que la matrice

$$C = \begin{bmatrix} c & {}^tB \\ B & A \end{bmatrix}$$

vérifie : $\forall X \in \mathcal{M}_R(n+1, 1) \backslash 0 \qquad {}^tX \, C \, X > 0.$

Trouver le minimum de l'application

$$\mathcal{M}_R(n, 1) \to \mathbb{R} \qquad X \longmapsto {}^tXAX - 2\,{}^tBX + c$$

(suivant l'usage, ${}^tXCX$ est identifié à $\det({}^tXCX)$).

8.42. — Soient U une partie ouverte et convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application convexe et différentiable.

a) Montrer que f présente un minimum en tout $(a, b) \in U$ tel que $df(a, b) = 0$.

b) Montrer que $\{(x, y) \in U \mid df(x, y) = 0\}$ est une partie convexe de U sur laquelle f est constante.

8.43. — Extremums de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \longmapsto (x+y+z)^2 + (x+y)^2 + x^2$ lorsque $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

8.44. — Extremums de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x, y, z) \longmapsto x \ln x + y \ln y + z \ln z$ (x, y, z) étant assujetti à appartenir au plan $x + y + z = 3a$, $(a > 0)$.

8.45. — Dans un plan euclidien, trouver les triangles de périmètre donné dont l'aire est extremale.

8.46. — Dans un plan euclidien trouver les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle donné.

8.47. — Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, on donne une sphère S et deux de ses points a et b. Trouver les extremums de la fonction $m \longmapsto \|am\| + \|bm\|$ lorsque m est assujetti à appartenir à S.

8.48. — Extremums de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x, y, z) \longmapsto x^2+y^2+z^2$, (x, y, z) étant assujetti à appartenir à la surface d'équation $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} - 1 = 0$. On trouvera 14 points. On montrera que les 6 qui sont sur les axes de coordonnées correspondent à des minimums, les autres à des maximums.

8.49. — Maximum de $f : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, où les x_k sont des réels positifs ou nuls de somme n. En déduire que la moyenne géométrique de n éléments de $\mathbb{R}_+$ n'excède pas leur moyenne arithmétique.

Retrouver ce résultat en utilisant le fait que Log est une fonction concave.

8.50. — Extremums de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x, y, z) \longmapsto x^3+y^3+z^3$, (x, y, z) étant assujetti à : $(x+y+z = 6) \wedge (x^2+y^2+z^2 = 14)$.

8.51. — Soient U un ouvert convexe d'un espace de Banach, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application convexe et différentiable sur u. Montrer que s'il existe $a \in U$ tel que $df(a) = 0$, alors f admet un minimum absolu en a.

INDEX ALPHABÉTIQUE

- *Les renvois concernent des numéros de page.*
- *Un terme défini par un groupe de mots est classé d'après le premier de ces mots (à moins qu'il ne fasse intervenir un nom propre, auquel cas il est classé d'après ce nom propre).*

